



UNIVERSIDAD  
CARLOS III DE MADRID

**Escuela  
Politécnica  
Superior**

Ingeniería Técnica Industrial: Mecánica

Proyecto Fin de Carrera

# **Dinámica de Placas con Amortiguamiento Viscoelástico No Local**

Alumno: Cristian Palo Fernández.

Tutor: Prof. Sergio González López.

# Índice general

<b>Introducción y objetivos .....</b>	<b>3</b>
1.1.- Introducción.....	3
1.2.- Objetivos.....	5
<b>Viscoelasticidad .....</b>	<b>6</b>
2.1.- Introducción a la Viscoelasticidad y relajación. ....	6
2.2.- Viscoelasticidad lineal. Ecuaciones constitutivas basadas en la viscoelasticidad lineal.....	8
2.3.- La ecuación general de la viscoelasticidad lineal. ....	10
2.4.- Modelos o analogías mecánicas. ....	11
2.5.- La ecuación constitutiva de la viscoelasticidad lineal. Ensayos y funciones de materiales basadas en la viscoelasticidad lineal. ....	13
2.5.1.- Relajación de esfuerzos. ....	13
2.5.2.- Ensayo de fluencia o creep. ....	14
2.5.3.- Experimentos de recuperación elástica.....	15
<b>Placas .....</b>	<b>16</b>
3.1.- Introducción a placas.....	16
3.1.1.- Hipótesis Básicas. ....	18
3.1.2.- Ecuaciones de Compatibilidad entre deformaciones y movimientos. ....	20
3.1.3.- Ecuaciones de Comportamiento. Relaciones entre las tensiones y la flecha. ....	21
3.1.4.- Esfuerzos por unidad de longitud. ....	23
3.1.5.- Ecuaciones de equilibrio. ....	26
3.1.6.- Ecuación diferencial de la flexión de placas. ....	28
3.1.7.- Condiciones de contorno. ....	30
3.2.- Placas rectangulares apoyadas en los cuatro lados .....	34
3.2.1.- Método de Navier. ....	34
<b>Placas con amortiguamiento viscoelástico no local.....</b>	<b>37</b>
4.1.- Introducción a la dinámica de placas .....	37
4.1.1.- Extremo apoyado .....	38

4.1.2.- Extremo empotrado.....	39
4.1.3.- Extremo libre.....	39
4.1.4.- Problemas de vibraciones libres .....	40
4.1.5.- Caso I: Placa apoyada.....	43
4.2.- Cálculo de la placa con amortiguamiento viscoelástico.....	46
4.3.- Modelos espaciales de la función de amortiguamiento .....	49
4.3.1.- Amortiguamiento viscoso local.....	49
4.3.2.- Amortiguamiento viscoelástico local.....	49
4.3.3.- Amortiguamiento viscoso no local.....	49
4.4.- Función de kernel espacial .....	50
4.4.1.- Modelo 1 - Exponencial de decaimiento. ....	50
4.4.2.- Modelo 2 - Función de error.....	51
4.5.- Función de Relajación.....	52
<b>Ecuación de movimiento y sus métodos de resolución.....</b>	<b>54</b>
5.1.- Transformada de Laplace .....	54
5.2.- Método de Galerkin.....	55
<b>Ejemplos numéricos .....</b>	<b>58</b>
6.1.- Referencias y pasos para la solución .....	58
6.2.- Caso 1: Condiciones de contorno - Apoyada en el contorno .....	62
6.2.1.- Modos propios no amortiguados.....	62
6.2.2.- Solución para un problema genérico $N = 4$ .....	62
6.2.3.- Análisis en centro de la placa.....	68
6.2.4.- Variaciones de los valores geométricos de la placa para $N=1$ .....	70
6.2.5.- Cambios en el material base de la placa para $N=1$ .....	76
6.2.6.- Cambios en las características del material amortiguador.....	83
6.3.- Caso 2: Condiciones de contorno - Empotrada en el contorno .....	62
6.3.1.- Modos propios no amortiguados.....	92
6.3.2.- Solución del problema genérico para $N=1$ .....	94
6.3.3.- Capacidad de amortiguamiento en el centro de la placa .....	96
<b>Conclusiones .....</b>	<b>92</b>
<b>Trabajos Futuros .....</b>	<b>101</b>
<b>Bibliografía .....</b>	<b>102</b>

# **Introducción y objetivos**

## **1.1.- Introducción**

Cuando se inicia a analizar estructuras amortiguadas, los resultados que se obtienen son de gran importancia en muchas áreas de la ingeniería civil, mecánica y aeroespacial, por ejemplo en las vibraciones de los puentes atirantados.

Es por ello que el modelo de amortiguación que se elija, juega un papel importante en el análisis dinámico, especialmente en las estructuras complejas, por lo tanto este modelo normalmente se aproxima por las distribuciones de amortiguación clásica o proporcional por simplicidad.

A pesar de ello, es posible encontrar situaciones prácticas, en la que estas simplificaciones, no son capaces de describir la dinámica de la estructura con la suficiente precisión, debido a los complicados mecanismos de amortiguación que se producen en el ensayo.

Por definición teórica, si un modelo de amortiguamiento tiene la propiedad de disipar la energía de forma no negativa, entonces es un posible candidato para un modelo de amortiguación válido. En consecuencia hay muchos modelos de amortiguamiento, y para obtener un modelo generalizado para los sistemas de ingeniería práctica es difícil, por lo tanto como se dijo al principio, se usan en general aproximaciones.

Para sistemas dinámicos de un grado de libertad, hay 3 modelos de amortiguamiento comunes, los cuales son: viscosos, estructurales y amortiguamiento de fricción de Coulomb. Por otro lado el análisis para un sistema de varios grados de libertad o un sistema distribuido, el modelo más utilizado es el amortiguamiento viscoso.

Por otro lado dentro de los modelos de amortiguamiento se encuentran los modelos locales y no locales. Un modelo de amortiguamiento se considera no local cuando se consideran las posiciones vecinas en el espacio y tiempo, a la hora de calcular los desplazamientos en un punto de la placa. Además de la historia de desplazamientos también intervienen el campo de velocidades de todos aquellos puntos que se encuentran dentro de la región amortiguada de dicha placa. Cabe destacar que esas influencias disminuyen a medida que la distancia aumenta  $|x_2 - x_1|$  y  $|y_2 - y_1|$ , éste último modelo lo argumentó, Flugge (1975) en su libro de texto de viscoelasticidad.

Sin embargo este modelo se puede particularizar de forma más sencilla para los casos de amortiguamiento viscoso y viscoelástico local.

En este proyecto la placa delgada (Love Kirchhoff) será sometido a un esfuerzo dinámico por área de superficie, que variará con el tiempo. Sin embargo en función de las condiciones de contorno, se obtendrán diversos resultados que luego serán analizados.

## **1.2.- Objetivos**

En primer lugar este proyecto tiene como objetivo proporcionar la expresión general de los modos propios de vibración para una placa con diferentes condiciones de contorno, los cuales se hallarán teniendo en cuenta que se trata de una vibración libre, es decir sin ser sometido a ninguna fuerza externa.

Por otro lado, como segundo paso, será el de hallar las frecuencias propias de vibración, sin embargo en este proyecto se tratará de resolver para el caso de una placa apoyada. Pero se especificarán las condiciones de contorno para que de forma particular se pueda resolver para los diferentes casos a los que podría estar condicionada el contorno de la placa.

Finalmente haciendo uso de los modos propios de vibración de una placa simplemente apoyada, el siguiente paso será, el de analizar los desplazamientos de una placa amortiguada, haciendo uso de un material viscoelástico, para lo cual se procederá a obtener una serie de resultados los cuales serán analizados y comparados variando las características tanto de la propia placa como los parámetros material amortiguador.

Originalmente la idea proviene de un proyecto anterior el cuál se basó en el análisis de una viga. Con lo cual se podría asumir como una continuación de dicho proyecto.

# Viscoelasticidad

## 2.1.- Introducción a la Viscoelasticidad y relajación

La teoría clásica de la elasticidad considera las propiedades mecánicas de los sólidos elásticos de acuerdo con la ley de Hooke, es decir, la deformación conseguida es directamente proporcional al esfuerzo aplicado (figura 2.1.a). Por otra parte, la teoría hidrodinámica trata las propiedades de los líquidos viscosos para los que, de acuerdo con la ley de Newton, el esfuerzo aplicado es directamente proporcional a la velocidad de deformación (figura 2.1.b), pero independientemente de la deformación misma.

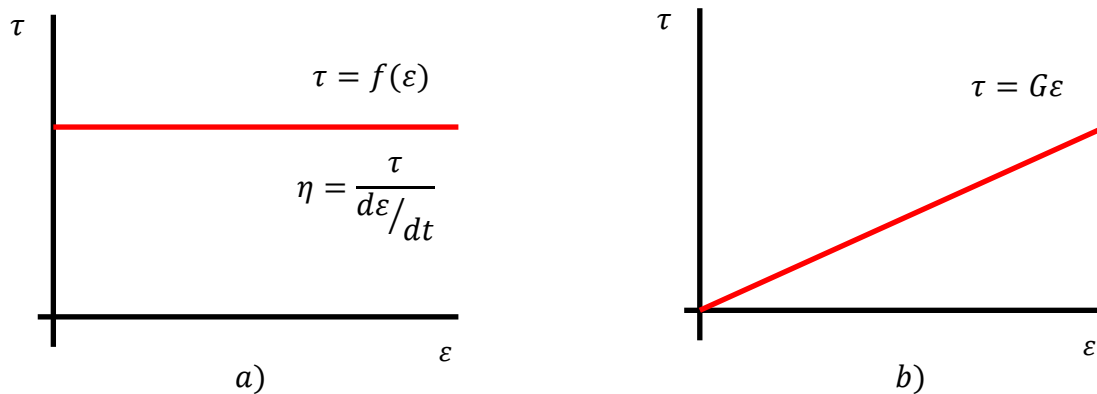


Fig. 2.1 Representación de las leyes de Newton (a) y Hooke (b).

Estas dos leyes son idealizaciones, aunque el comportamiento de muchos sólidos se aproxima a la ley de Hooke (comportamiento elástico) en infinitesimales deformaciones y el de muchos líquidos se aproxima a la ley de Newton (comportamiento viscoso) para velocidades de deformación bajas.

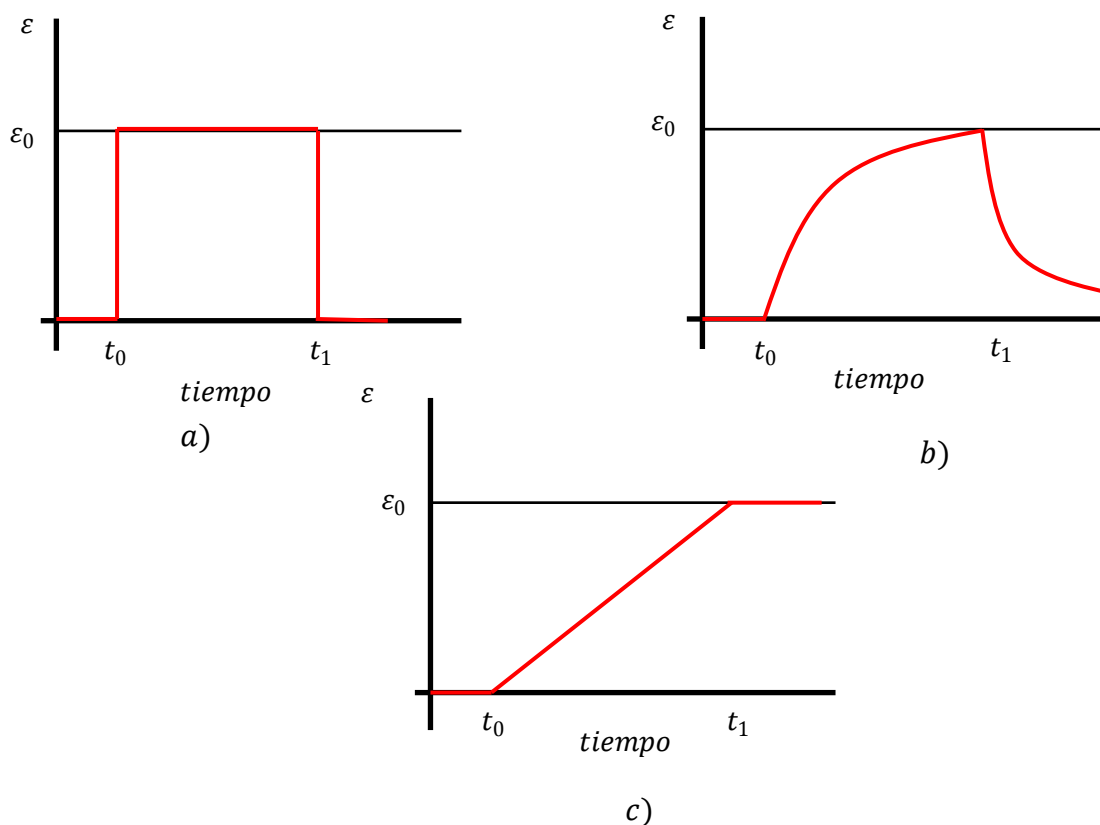


Fig. 2.2 Comportamiento elástico (a), viscoso (b) y viscoelástico (c).

De esta forma si se aplica un esfuerzo sobre un sólido elástico éste se deforma (figura 2.2.a) hasta que la fuerza cesa y la deformación vuelve a su valor inicial. Por otro lado, sin un esfuerzo es aplicado sobre un fluido viscoso (figura 2.2.b) éste se deforma, pero no recupera nada de lo que se deforma. Un comportamiento intermedio es el comportamiento viscoelástico (figura 2.2.c), en el que el cuerpo sobre el que se aplica el esfuerzo recupera parte de la deformación aplicada.

Un parámetro utilizado para caracterizar o clasificar las sustancias de acuerdo a su comportamiento elástico/viscoso/viscoelástico es el número de Deborah (nombre que procede del antiguo testamento, según la cual “las montañas fluirán delante del Señor”), parámetro introducido por el Dr. Reiner, uno de los fundadores de la reología. Éste número se define como:

$$De = \frac{\tau}{t} \quad (2.1)$$

Donde  $t$  es un tiempo característico del proceso de deformación al que se ve sometido una determinada sustancia y  $\tau$  es un tiempo de relajación característico de dicha sustancia; el tiempo de relajación es infinito para un sólido de Hooke y cero para un fluido de Newton. De hecho el tiempo de relajación es del orden de  $10^{-6}s$  para polímeros fundidos y  $10^{-12}s$  para el agua.



De acuerdo con el valor del número de Deborah todas las sustancias pueden ser clasificadas:

$De < 1$  Comportamiento viscoso.

$De > 1$  Comportamiento elástico.

$De \approx 1$  Comportamiento viscoelástico.

Según el concepto del número de Deborah todas las sustancias pueden fluir, sólo hay que esperar el tiempo necesario; de esta forma, un material puede comportarse como un sólido de Hooke si tiene un tiempo de relajación muy grande o si es sometido a un proceso de deformación en un tiempo muy bajo.

Y en cuanto a los polímeros, ¿Cuál es el orden de magnitud de sus tiempos de relajación? Por ejemplo, entre los polímeros de mayor consumo destacan: LDPE (6s), PS(1 s), PVC (30 s) o PET (2 s).

Y teniendo en cuenta que durante su procesado la deformación es impuesta hasta que adoptan la forma deseada en tiempos del orden de varios segundos o minutos, esto da lugar el número de Deborah cercanos o de orden de la unidad, lo cual supondría suponer en algunos casos un comportamiento marcadamente viscoelástico.

## **2.2.- Viscoelasticidad lineal. Ecuaciones constitutivas basadas en la viscoelasticidad lineal**

De esta forma, clasificando cualitativamente el comportamiento de los materiales de acuerdo a su número de  $De$  en un diagrama *Deformación/De* se podrían distinguir 3 zonas: una a bajos números de  $De$ , correspondiente a un comportamiento viscoso, otra zona de números de  $De$  elevados, correspondiente a un comportamiento puramente elástico y una zona intermedia correspondiente a un comportamiento viscoelástico. Sin embargo, a su vez dentro de cada zona podrían observarse diferentes comportamientos en los sólidos elásticos y en los fluidos viscosos atendiendo a la linealidad existente entre esfuerzo/deformación y esfuerzo/velocidad de deformación:

- Muchos sólidos elásticos dejan de seguir la relación lineal por la ley de Hooke por encima de un cierto valor de deformación.
- De igual modo muchos fluidos viscosos dejan de seguir la ley de Newton por encima de un cierto valor de velocidad de deformación.

En cuanto a los materiales viscoelásticos, el comportamiento es algo parecido, para deformaciones muy bajas, casi cercanas al equilibrio, existe una relación lineal entre esfuerzo y deformación, encontrándose en la zona denominada como de “viscoelasticidad lineal”. Para deformaciones mayores, dicha relación deja de ser lineal y se alcanza la denominada zona de “viscoelasticidad no lineal”.

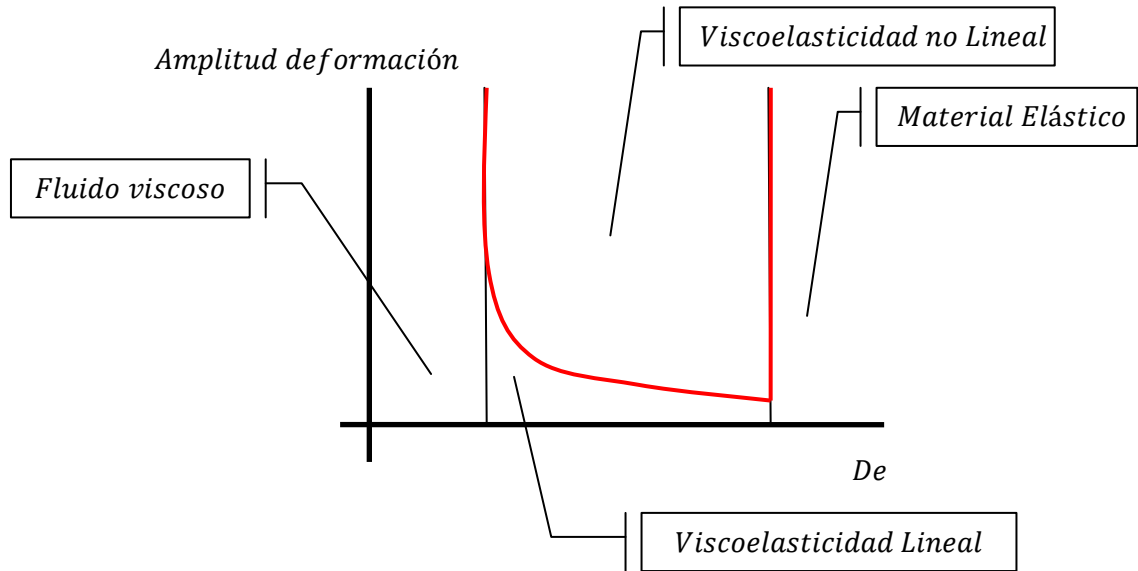


Fig. 2.3 Comportamiento de un material en función de la amplitud de la deformación y el número de Deborah.

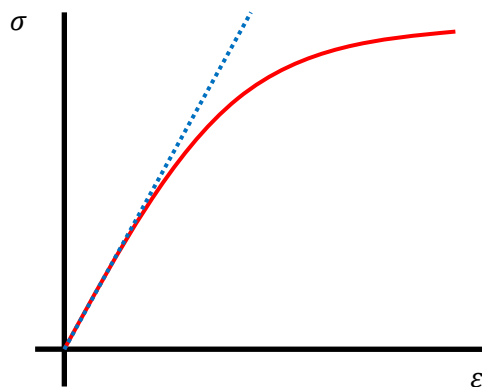


Fig. 2.4 Relación entre esfuerzo y deformación para un fluido viscoelástico.

Para un ingeniero químico que pueda encontrarse en la situación de tratar con materiales viscoelásticos ambas zonas son de interés:

- Por un lado, las bajas deformaciones conseguidas en los reómetros aseguran un régimen de viscoelasticidad lineal, que como se ha dicho, está sujeto a

deformaciones casi infinitesimales, muy cercanas al equilibrio, de forma que la respuesta de un material en este régimen está fuertemente condicionada con su estructura molecular, lo cual le confiere la capacidad de ser una buena herramienta de caracterización.

- Por otro lado, durante el proceso de los polímeros estos sufren importantes deformaciones que corresponden a la zona de viscoelasticidad lineal. Por ejemplo, a la hora de abordar el diseño de ciertas operaciones unitarias de procesamiento de polímeros, sería necesario contemplar por un lado la viscoelasticidad de los materiales y por otro las elevadas deformaciones que tienen lugar. Concretamente en operaciones del tipo del calandrado, hilado, prensado y soplado son operaciones donde este análisis debería de ser llevado a cabo para un diseño más acorde con la realidad.

### 2.3.- La ecuación general de la viscoelasticidad lineal

El desarrollo de la teoría matemática de la viscoscoelasticidad lineal se basa en el principio de que la respuesta (deformación) a cualquier tiempo es directamente proporcional a su fuerza impulsora (esfuerzo). De esta forma, si la deformación y la velocidad de deformación son infinitesimales y la relación esfuerzo-deformación, dependiente del tiempo, puede ser descrita por ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, tenemos un comportamiento viscoelástico lineal.

La relación entre el esfuerzo de deformación, la deformación y su dependencia con el tiempo vienen dadas por la ecuación constitutiva o ecuación reológica de estado. Para un sistema sometido a una cizalla simple, asumiendo que se cumple el principio de aditividad de cambios secuenciales de deformación (principio de Maxwell-Boltzmann), la ecuación constitutiva se puede escribir:

$$\tau(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t') \frac{d\gamma(t')}{dt'} dt' \quad (2.2)$$

O bien:

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^t J(t-t') \frac{d\sigma(t')}{dt'} dt' \quad (2.3)$$

Donde  $t$  es el tiempo actual, y  $t'$  es un instante anterior cualquiera del proceso; se definen  $G(t)$  como el módulo de relajación y  $J(t)$  como complianza.

Una forma alternativa de escribir la ecuación (2.2) es con ayuda de la función de memoria  $M(t - t')$ :

$$\tau(t) = \int_{-\infty}^t M(t - t') \gamma(t, t') dt' \quad (2.4)$$

Como se puede apreciar cada uno de las integrales de las expresiones anteriores consta de dos términos: uno característico del material, y otro característico del proceso de deformación. Hay que hacer notar que tanto  $M(s)$  como  $G(s)$ , donde  $s = t - t'$ , son funciones que tienden a cero cuando  $s$  tiende a infinito.

## 2.4.- Modelos o analogías mecánicas

Ya que el comportamiento reológico de materiales viscoelásticos es difícil de visualizar, a menudo se suelen emplear modelos mecánicos para su presentación. En esos modelos se suelen presentar el comportamiento de un fluido de Newton como un pistón trabajando en un cilindro, mientras que un comportamiento elástico como el de un sólido de Hooke se suele presentar como un muelle. El pistón (figura 2.5.a) representa la disipación de energía en forma de calor mientras que el muelle representa la energía almacenada en el cuerpo (figura 3.5.b). Con el pistón el esfuerzo aplicado es independiente de la deformación aplicada, al contrario de lo que ocurre con el muelle, en el cual el módulo  $G$  o  $E$  es la constante de proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación.

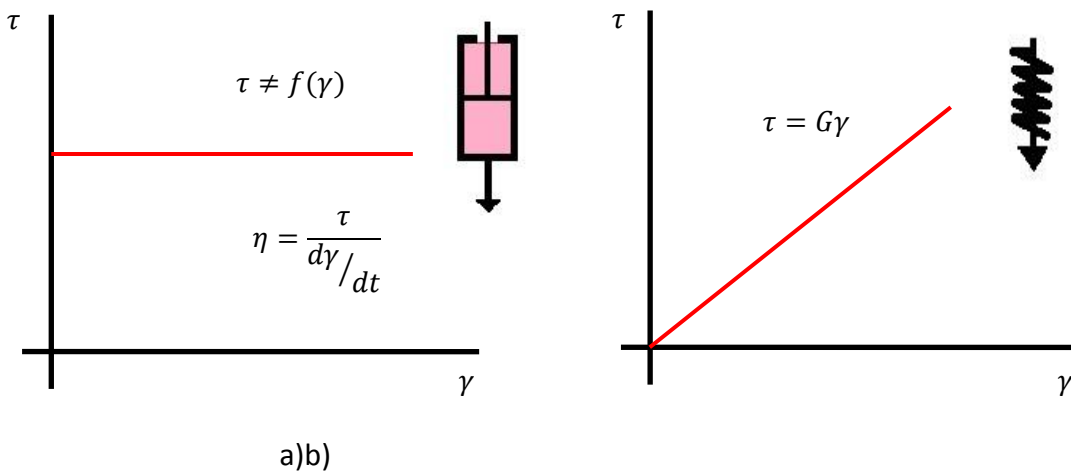
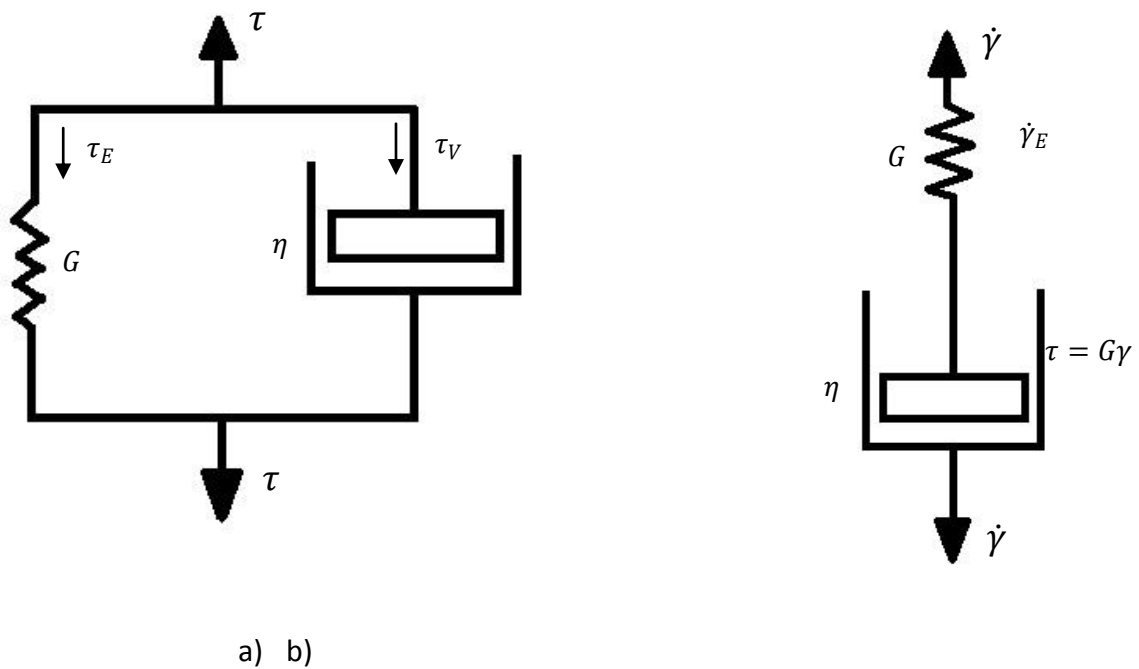


Fig. 2.5 Representación del comportamiento a) Viscoso de un pistón y b) Elástico como un muelle

De esta forma el comportamiento de muchos cuerpos viscoelásticos podría ser representado adecuadamente mediante una combinación de dichos muelles y pistones, consiguiendo buenos ajustes de datos experimentales.

Aunque en la bibliografía se puede encontrar un gran número de posibilidades de combinaciones entre pistones y muelles que cada autor considera adecuada, prácticamente todos ellos se basan en los modelos de Maxwell y Kelvin. El modelo de Maxwell representa el comportamiento de las sustancias viscoelásticas como una combinación en serie de un muelle y un pistón. Sin embargo en el modelo de Kelvin utiliza ambos elementos en paralelo.

Estos elementos son muy sencillos y en muy pocos casos correlacionan adecuadamente los resultados experimentales; mejores resultados se pueden obtener con el modelo de Burgers, el cual consta de un elemento de Maxwell y otro de Kelvin en serie.



*Fig. 2.6 Representación del comportamiento viscoelástico de un material mediante los modelos de a) Kelvin, b) Maxwell.*

## 2.5.- La ecuación constitutiva de la viscoelasticidad lineal. Ensayos y funciones de materiales basadas en la viscoelasticidad lineal.

La ecuación constitutiva puede ser usada para describir la respuesta de los materiales que siguen un comportamiento viscoelástico lineal en distintos tipos de experimentos en cizalla simple.

Los experimentos más comunes empleados, basados en la viscoelasticidad lineal para la caracterización de materiales son los siguientes:

- Relajación de esfuerzos.
- Ensayo de fluencia.
- Recuperación elástica.

### 2.5.1.- Relajación de esfuerzos.

Consiste en la aplicación de una velocidad de deformación en cizalla simple, donde se mantiene una determinada deformación en cizalla simple y estudiar la variación de esfuerzo de cizalla necesario en función del tiempo.

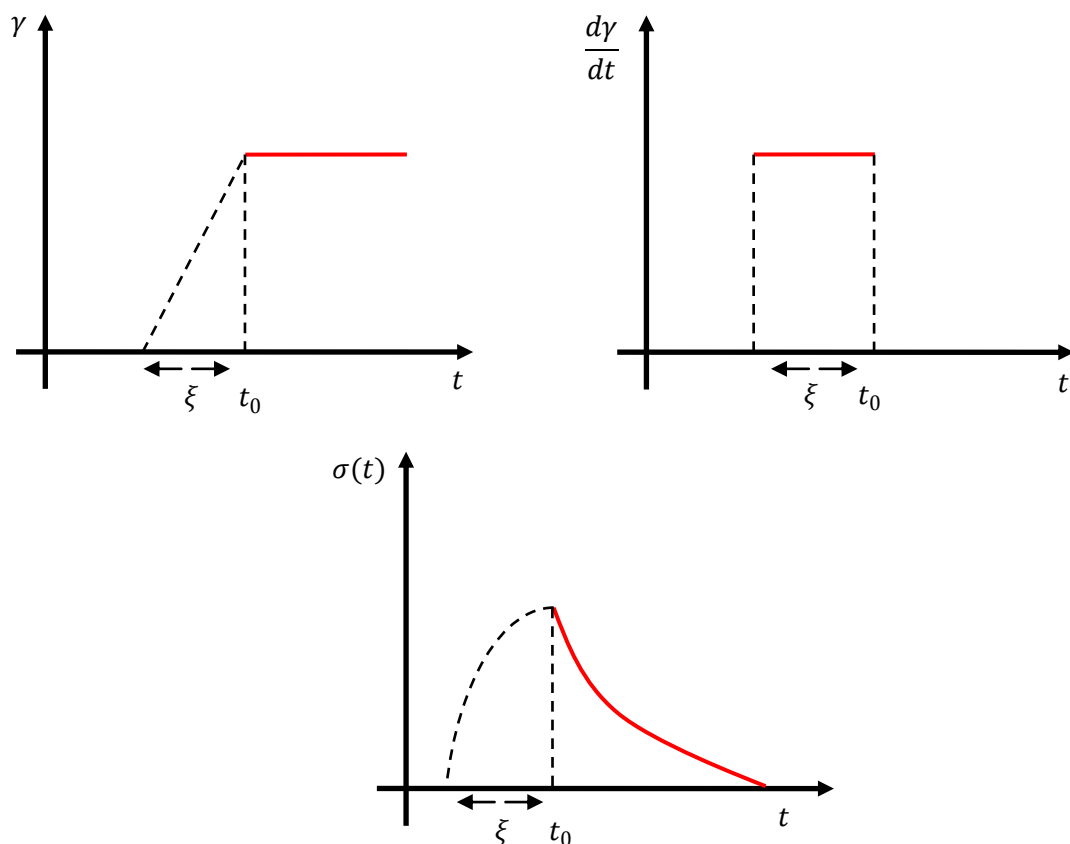


Fig. 2.7 Experimento de relajación de esfuerzos.

Teniendo en cuenta la figura 2.7, la ecuación (2.2) se transforma en:

$$\sigma(t) = \int_{t_0-\xi}^{t_0} G(t-t') \frac{\gamma}{\xi} dt' \quad (2.5)$$

Por el teorema del valor medio, se obtiene:

$$\sigma(t) = \frac{\gamma}{\xi} \xi G(t - t_0 + \varepsilon \xi) \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1 \quad (2.6)$$

Eligiendo  $t_0 = 0$ :

$$\sigma(t) = \gamma G(t + \varepsilon \xi) \quad (2.7)$$

Para los tiempos suficientemente grandes comparados con  $\xi$ , la ecuación anterior se convierte en:

$$\sigma(t) = \gamma G(t) \quad (2.8)$$

La ecuación obtenida es la característica para este tipo de experimentos; para un sólido elástico,  $G(t)$  alcanza una situación de equilibrio dada por el módulo de rigidéz en equilibrio  $G_e = cte$ , mientras que para líquidos newtonianos (o puramente viscosos), el material se relaja muy rápidamente (en el agua por ejemplo  $t_{relajación} = 10^{-13} s$ ).

### 2.5.2.- Ensayo de fluencia o creep.

En este caso, se mantiene constante el esfuerzo y se observa la variación de la deformación en función del tiempo, como se observa en la figura 2.8.

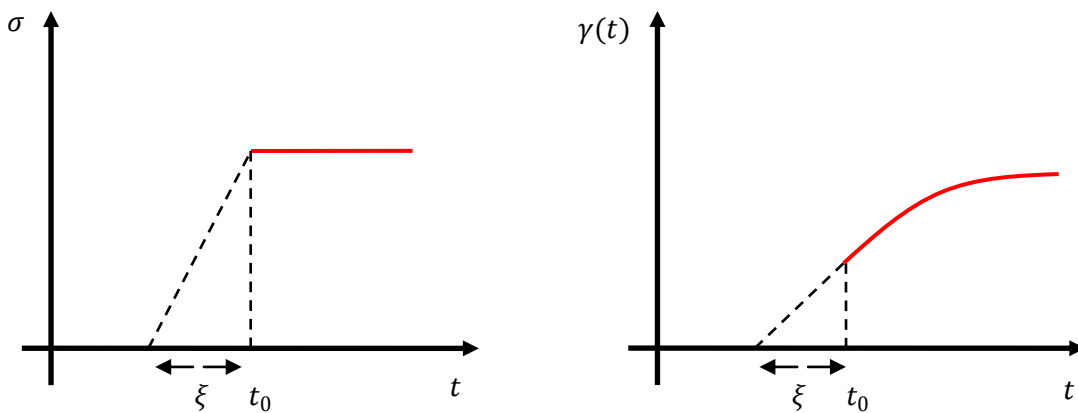


Fig. 2.8 Ensayo de fluencia.

Aplicando la ecuación constitutiva (2.3), teniendo en cuenta la figura 2.8, y análogamente el caso anterior, se obtiene la función complianza o resiliencia  $J(t)$ :

$$J(t) = \frac{\gamma(t)}{\sigma} \quad (2.9)$$

Si se trata de un sólido elástico se alcanza rápidamente una situación de equilibrio, en la cual  $J(t)$  deja de variar con el tiempo definiéndose la complianza de equilibrio  $J_e$  que es característica de cada material. Sin embargo, los líquidos puramente viscosos dan lugar a una función lineal  $J(t) = t/\eta$  siendo  $\eta$  la viscosidad.

Los materiales viscoelásticos presentan un comportamiento intermedio: cuadrático a tiempos pequeños, y lineal a tiempos altos.

### 2.5.3.- Experimentos de recuperación elástica.

Este tipo de experimentos consiste en la aplicación de un esfuerzo constante estudiando la deformación producida para posteriormente retirar este esfuerzo y observar la recuperación en función de tiempo.

Mientras que en los materiales elásticos la recuperación es total, en los viscosos no hay recuperación y en los viscoelásticos se da una recuperación parcial  $\gamma_r = \sigma_0 J_e^0$ , siendo  $J_e^0$  la complianza de flujo estacionario. Este tipo de experimentos de fluencia y recuperación posterior permiten caracterizar la elasticidad del material en términos de  $J_e^0$  y su viscosidad  $\eta$ . Evidentemente, para un sólido elástico  $\eta$  resulta ser  $\infty$  y  $J_e^0 = J_e$ , mientras un líquido puramente viscoso presentará una determinada viscosidad  $\eta$ , pero carecerá de elasticidad.

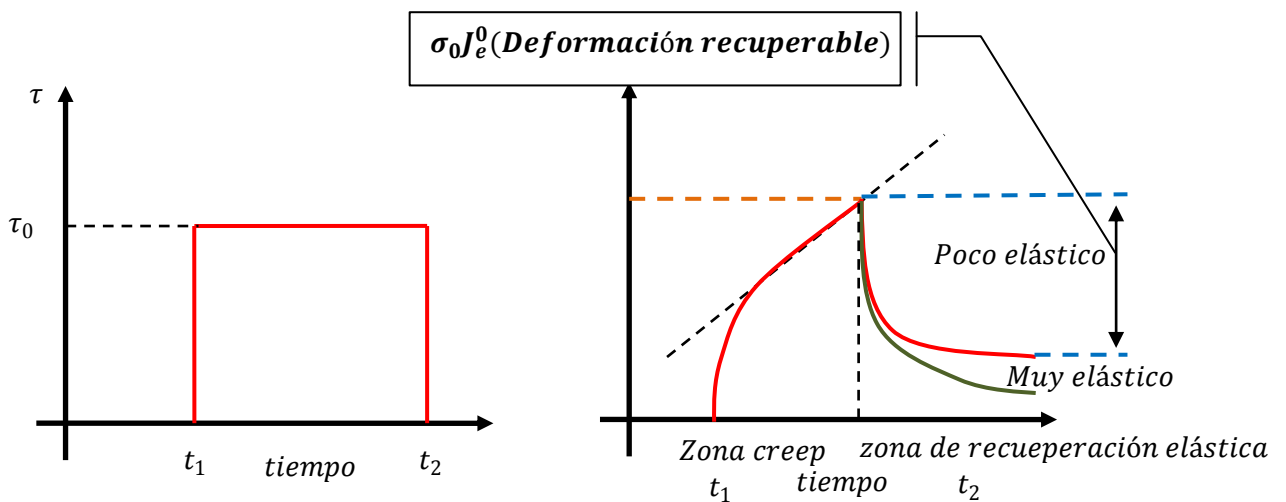


Fig. 2.9 Ensayo de recuperación elástica.



# Placas

## **3.1.- Introducción a placas.**

En cuanto a las placas, sabiendo que son elementos estructurales planos, en donde el espesor es mucho menor que sus dos lados de la misma. Los ejemplos más utilizados en la construcción que podemos citar, son: cubiertas, forjados, paredes y tejados de edificios, tableros de puentes, losas, compuertas, etc.



*Fig. 3.1 Barcaza Dracaza XIII colocando tableros al puente.*

Mientras tanto es usual definir el “plano medio” o “superficie media” de la placa como aquel que divide al espesor en dos partes iguales. Por tanto el espesor de la placa en cada punto se mide en dirección perpendicular a dicho plano, dependiendo en su mayoría en las propiedades a flexión de la placa, de la relación entre el espesor y las otras dos dimensiones.

Por lo tanto las placas pueden clasificarse en:

- Placas delgadas sometidas a flechas pequeñas.
- Placas delgadas sometidas a grandes flechas.
- Placas gruesas.

Cabe destacar que para flechas pequeñas y efectos prácticos, se considerarán placas delgadas aquellas en que el espesor sea 20 veces menor que la longitud más pequeña que las otras dos dimensiones planas.

Este tipo de placas se diferencian de las lajas, estudiadas en teoría de la Elasticidad Plana, en que ésta solo se encuentran sometidas a cargas en los bordes y paralelas a la superficie media, mientras que las placas pueden estar sometidas también a cargas transversales a la superficie media.

Para el cálculo de la distribución de tensiones y desplazamientos en una placa, sujeta a unas cargas exteriores en su superficie o en el interior del volumen, es necesario utilizar una serie de leyes e hipótesis que se establecerán en los epígrafes siguientes, para que luego sean aplicados en los posteriores capítulos.

El análisis de la mayoría de las configuraciones de placas se realiza resolviendo una ecuación diferencial que depende de la flecha de la placa, de las cargas y de la rigidez.

La flecha es el movimiento en dirección perpendicular al plano medio de la placa y es la solución de la ecuación diferencial. Los esfuerzos son el resultado de la integración de las tensiones a lo largo del espesor de la placa y se pueden calcular a partir de la flecha.

### 3.1.1.- Hipótesis Básicas

De forma análoga, y como se establecen en el análisis de estructuras de barras las hipótesis de Navier que hacen referencia a las relaciones entre las diferentes dimensiones, la magnitud de los movimientos, las características de la deformación y la magnitud de algunas tensiones, también en las placas se asumen una serie de consideraciones que facilitan la resolución de las ecuaciones y que se conocen con el nombre de las hipótesis de Kirchhoff.

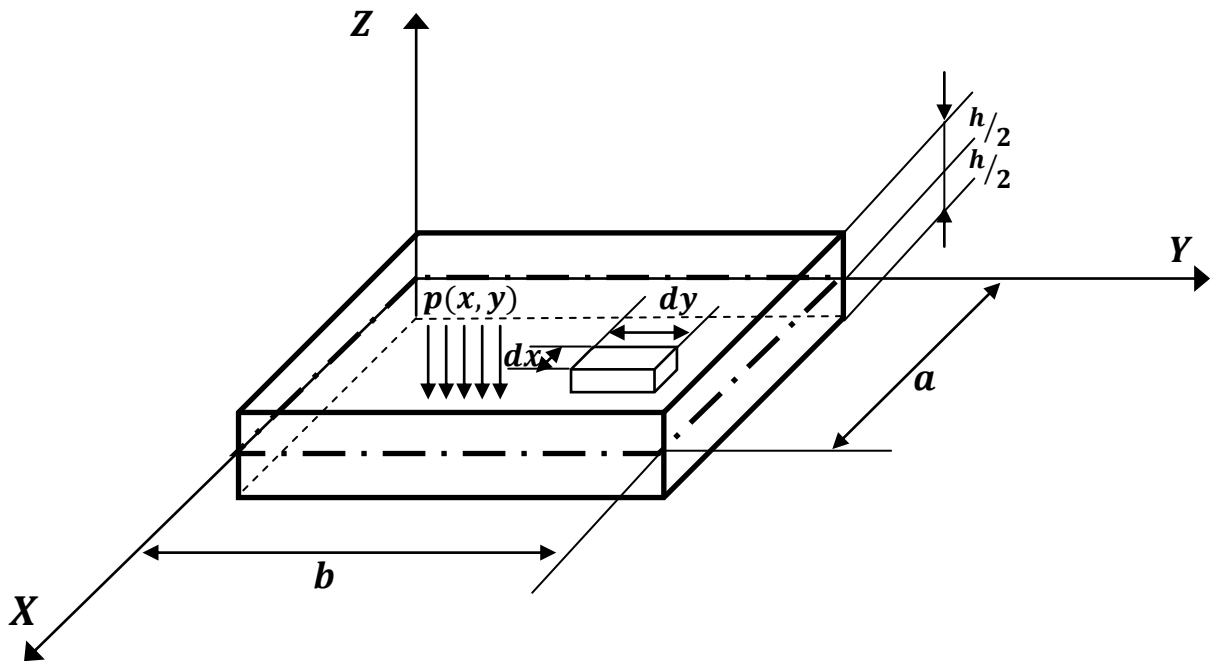


Fig. 3.2 Placa rectangular.

En la figura 3.2 aparece una placa rectangular de dimensiones  $a \times b$ , definida en unos ejes cartesianos, y cargada con una fuerza distribuida transversal  $p(x, y)$ . El análisis lineal de una placa a flexión como ésta, se consideran las siguientes hipótesis:

1.  $h \ll a, h \ll b$
2. La deflexión de la superficie media es pequeña comparada con el espesor de la placa. El giro de la superficie flectada es por tanto muy pequeño y el cuadrado de este giro es despreciable frente a la unidad.
3. El material es isótropo y homogéneo.

Estas son las hipótesis iniciales de una placa isótropa delgada y sometida a pequeñas deflexiones, pero además de éstas son necesarias otras hipótesis:

- La superficie media permanece sin tensión debido a la flexión simple.
- Superficies planas inicialmente normales a la superficie media permanecen planas y normales a esta superficie después de la deformación. Esto significa

que las deformaciones  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ . Por lo tanto, las flechas de la placa están asociadas con las deformaciones de flexión, donde se desprecian las del cortante al igual que ocurría en vigas. Además, también se desprecia la deformación axial  $\varepsilon_z$ . Es decir que un elemento recto transversal a la placa, permanece recto después de la deformación, debido a la hipótesis (2), no se alarga ni se acorta durante la deflexión.

- Las tensiones normales a la superficie media  $\sigma_z$  son pequeñas comparadas con las otras componentes, pudiendo despreciarse. Esta hipótesis surge a posteriori después de comprobaciones en casos normales. Así para el caso de las placas de las alas de un avión sometido a presiones aerodinámicas la relación entre tensiones  $\sigma_z$  y de flexión es de 1 a 20000. Esto no se cumple en las proximidades de cargas transversales concentradas.
- Se supone además el principio de Saint Venant.

Las hipótesis anteriores se conocen como “Hipótesis de Kirchhoff” y son en todo análogas a las hipótesis de flexión de vigas de Navier, habiéndose mostradas como válidas en la práctica la totalidad de las aplicaciones ingenieriles y permitiendo el trabajo en solo dos dimensiones.

Apoyándonos en estas hipótesis, y como se verá posteriormente, es posible expresar todas las tensiones en función de la flecha de la superficie media. Ésta función tiene que satisfacer una ecuación diferencial que junto con las condiciones de contorno resuelve el problema.

La segunda hipótesis equivale a despreciar el efecto de los esfuerzos cortantes en la deformación de placas lo que es usualmente aceptable salvo en casos especiales como placas con agujeros, en las proximidades de éstos.

Si además de las cargas transversales hay cargas en el plano medio, la primera hipótesis ya no es aceptable siendo necesario incluir términos adicionales en las ecuaciones, que se verá más adelante.

Además esta primera hipótesis solo se cumple si la placa se deforma en una superficie desarrollable, mientras que en otros casos aparecen deformaciones en el plano medio, si bien los cálculos demuestran que para las flechas pequeñas estas deformaciones son despreciables.

Para grandes flechas se modifican las ecuaciones iniciales convirtiéndose en no lineales y complicándose sustancialmente su resolución.

Para grandes flechas aparece además el efecto de membrana que puede ser mayor incluso que el efecto de flexión para placas muy delgadas debiendo tenerse en cuenta.

Por último cuando el espesor no es despreciable, es necesario recurrir a teorías tridimensionales que complican el análisis aún más, habiéndose resuelto tan solo unos pocos casos simples.

### 3.1.2.- Ecuaciones de Compatibilidad entre deformaciones y movimientos

En este apartado se estudiará el desplazamiento debido a flexión de la placa que tienen dos puntos  $A$  y  $B$  situados a una distancia  $z$  del plano medio en dirección normal. En la figura 3.3 se puede observar que el punto  $A$  se encuentra por encima del plano medio, se desplaza en dirección  $Z$ , pero además sufre un pequeño desplazamiento en sentido contrario al eje  $X$  debido al giro  $\theta$  de valor:

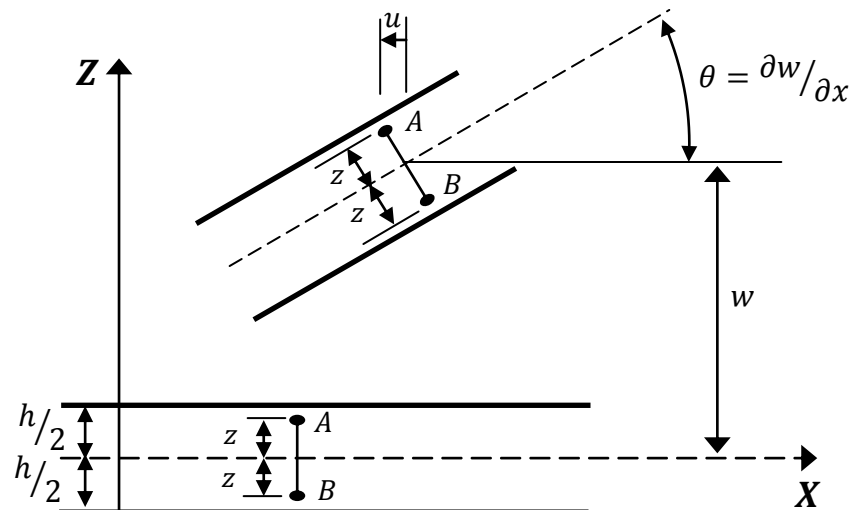


Fig. 3.3 Deformación a flexión de una sección perpendicular al eje  $Y$ .

Por lo tanto la deformación en el eje  $X$

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.2)$$

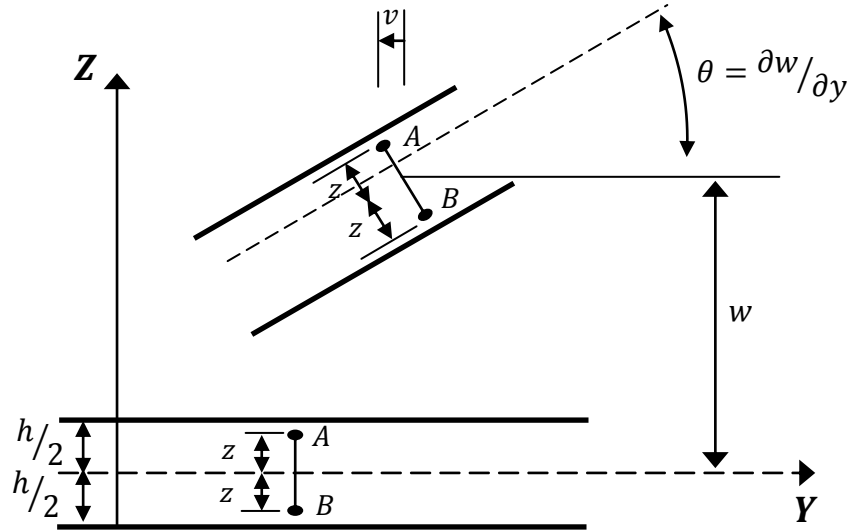


Fig. 3.4 Deformación a flexión de una sección perpendicular al eje X.

Análogamente se estudia el desplazamiento en el eje Y:

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.4)$$

Mientras que la deformación en el plano XY también puede expresarse en función de las derivadas de la flecha mediante:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.5)$$

Todas estas expresiones mencionadas anteriormente son válidas por la hipótesis, en que se suponen pequeñas deformaciones en la placa.

### 3.1.3.- Ecuaciones de Comportamiento. Relaciones entre las tensiones y la flecha

Haciendo uso de las ecuaciones de **Lamé** de la elasticidad clásica se pueden escribir las tensiones en función de las deformaciones.

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (3.6)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad (3.7)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (3.8)$$

Dónde:

$\sigma_x$ : Tensión en dirección  $X$ .

$\sigma_y$ : Tensión en dirección  $Y$ .

$\tau_{xy}$ : Tensión tangencial en el plano  $XY$ .

Estas expresiones suponen un material homogéneo e isótropo en el que  $E$  es el módulo de elasticidad,  $\nu$  el coeficiente de poisson y  $G$  el módulo de deformación cortante.

Sin embargo muchas aplicaciones en ingeniería civil emplean materiales ortótropos en los que su comportamiento cambia en función de la dirección en que se apliquen las cargas. Se pueden considerar que tienen un comportamiento ortótropo, las placas de acero corrugado, de madera contrachapada, de hormigón armado o de materiales compuestos. En estos casos hay que definir los siguientes parámetros:

$E_x$ : Módulo de elasticidad en dirección  $X$ .

$E_y$ : Módulo de elasticidad en dirección  $Y$ .

$\nu_x$ : Contracción en la dirección  $Y$  debido a la tensión en  $X$ .

$\nu_y$ : Contracción en la dirección  $X$  debido a la tensión en  $Y$ .

Las ecuaciones de **Lamé** se escriben en función de estos parámetros en la forma:

$$\sigma_x = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} (\epsilon_x + \nu_{xy}\epsilon_y) \quad (3.9)$$

$$\sigma_y = \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} (\epsilon_y + \nu_{yx}\epsilon_x) \quad (3.10)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (3.11)$$

Para expresar las tensiones en función de las derivadas de la flecha de la placa, deben sustituirse las ecuaciones de compatibilidad, quedando:

$$\sigma_x = \frac{-E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.12)$$

$$\sigma_y = \frac{-E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.13)$$

$$\tau_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.14)$$

Una vez que se halla expresado las tensiones en función de la flecha, se pueden integrar a lo largo del espesor para obtener los esfuerzos por unidad de longitud que actúan en cualquier elemento diferencial de la placa. Estos valores de esfuerzo relacionan también con la flecha a través de las últimas expresiones.

### 3.1.4.- Esfuerzos por unidad de longitud

Los esfuerzos que pueden aparecer en una placa delgada con carga transversal son: momentos flectores, esfuerzos cortantes perpendiculares a la placa y momentos torsores. El criterio general, que establece el signo de estos esfuerzos, indica que son positivos cuando están creados por tensiones positivas en puntos situados por encima del plano medio de la placa.

En la figura 3.5 se puede observar representado el elemento diferencial de placa de dimensiones  $dx dy$ . Los momentos flectores  $M_x$  están creados por las tensiones  $\sigma_x$ , las cuales llevan la dirección positiva del eje  $X$  en la cara frontal del elemento, mientras que en la cara dorsal tienen sentido contrario. El valor del momento flector cambia al aumentar la coordenada  $x$  pasando de  $M_x$  en la cara dorsal a:

$$M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx = M_x + M_{x,x} dx \quad (3.15)$$

en la cara frontal.

De forma análoga ocurre con los momentos flectores  $M_y$  que están creados por tensiones  $\sigma_y$  variando su valor al cambiar la coordenada  $Y$

$$M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy = M_y + M_{y,y} dy \quad (3.16)$$

Integrando los momentos creados por las tensiones en el centro de las caras del elemento, se obtienen:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = \frac{-E_x h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.17)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = \frac{-E_y h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.18)$$



En las integrales se han utilizado expresiones, de manera que el resultado queda en función de las derivadas parciales de la flecha.

Dónde:

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}, \quad D_1 = D_x \nu_{xy} \quad (3.19)$$

$$D_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}, \quad D_2 = D_y \nu_{yx} \quad (3.20)$$

Sin embargo es posible escribir los momentos flectores de forma más genérica:

$$M_x = - \left( D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.21)$$

$$M_y = - \left( D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.22)$$

Por otro lado las tensiones tangenciales en el plano  $XY$ ,  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{yx}$  crean respectivamente los denominados momentos torsores  $M_{xy}$  y  $M_{yx}$ . En la figura 3.5 se representan los sentidos positivos de estos esfuerzos.

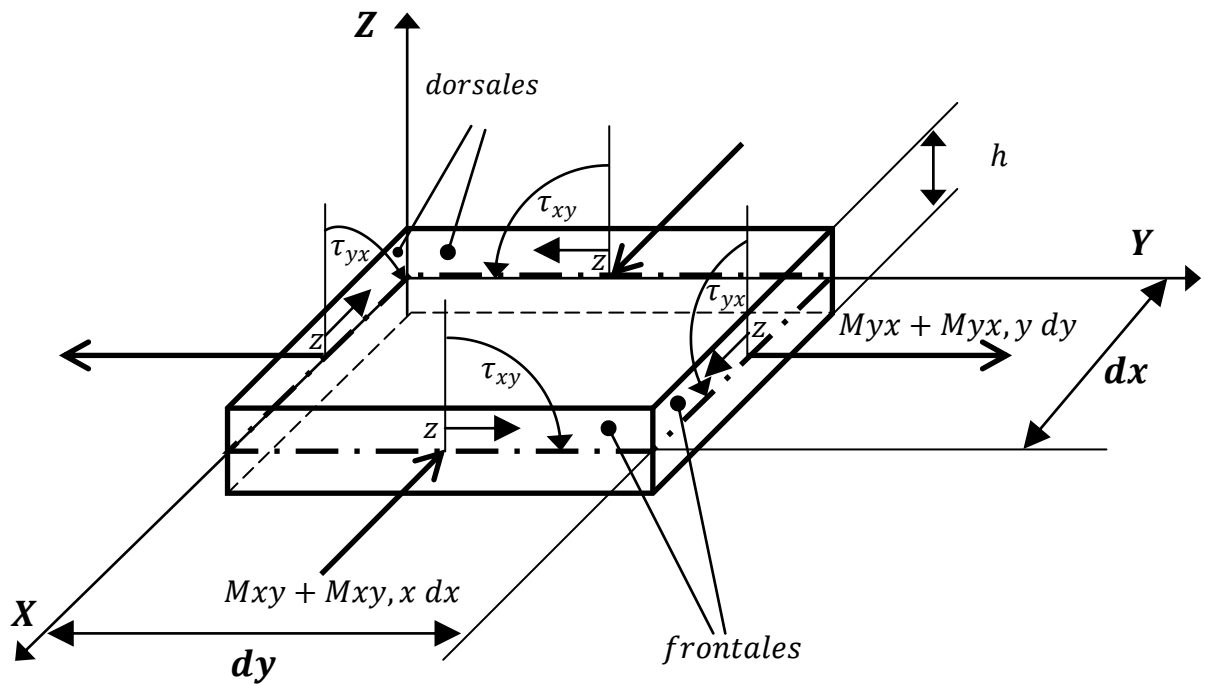


Fig. 3.5 Momentos torsores en un elemento diferencial de placa.

Para obtener las expresiones de los momentos torsores deben efectuarse las siguientes integrales:

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -2G \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.23)$$

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z dz = -2G \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = M_{xy} \quad (3.24)$$

Donde se han utilizado las expresiones (3.12), (3.13), (3.14) de  $\tau_{xy}$ . Para escribir de forma más compacta (3.23), (3.24) se define:

$$D_{xy} = G \frac{h^3}{6} \quad (3.25)$$

Quedando

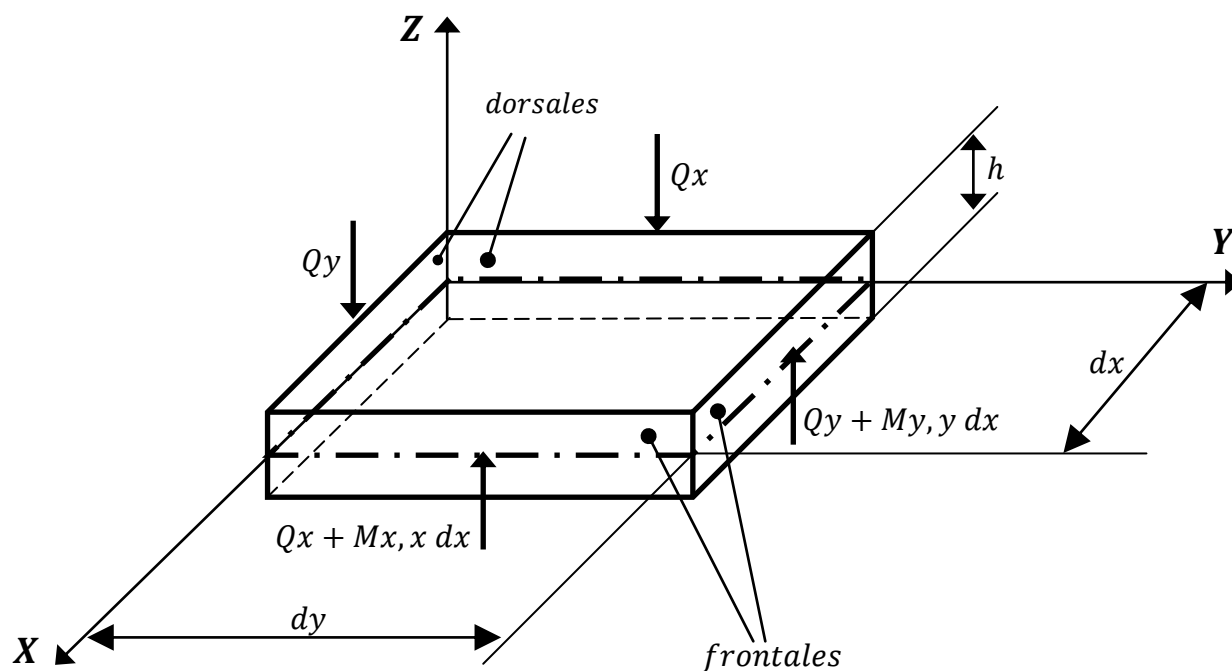
$$M_{xy} = M_{yx} = -D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.26)$$

Además de los momentos flectores  $M_x$  y  $M_y$  y los momentos torsores  $M_{xy}$ , en una placa a flexión aparecen esfuerzos cortantes verticales, denominados  $Q_x$  y  $Q_y$ , de valor:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad (3.27)$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (3.28)$$

Como se observa en la figura 3.6, también los esfuerzos cortantes experimentan variaciones en su valor cuando se incrementan las coordenadas  $dx$  o  $dy$ .



*Fig. 3.6 Esfuerzos cortantes en un elemento diferencial de placa.*

Una vez definidos todos los esfuerzos que aparecen en la placa, se está en condiciones de estudiar el equilibrio de un elemento diferencial de la misma.

### 3.1.5.- Ecuaciones de equilibrio

En la figura 2.6 se representa el plano medio de un elemento diferencial de la placa y sobre él, todos los esfuerzos existentes, así como la carga distribuida por unidad de superficie, también llamada intensidad de carga.

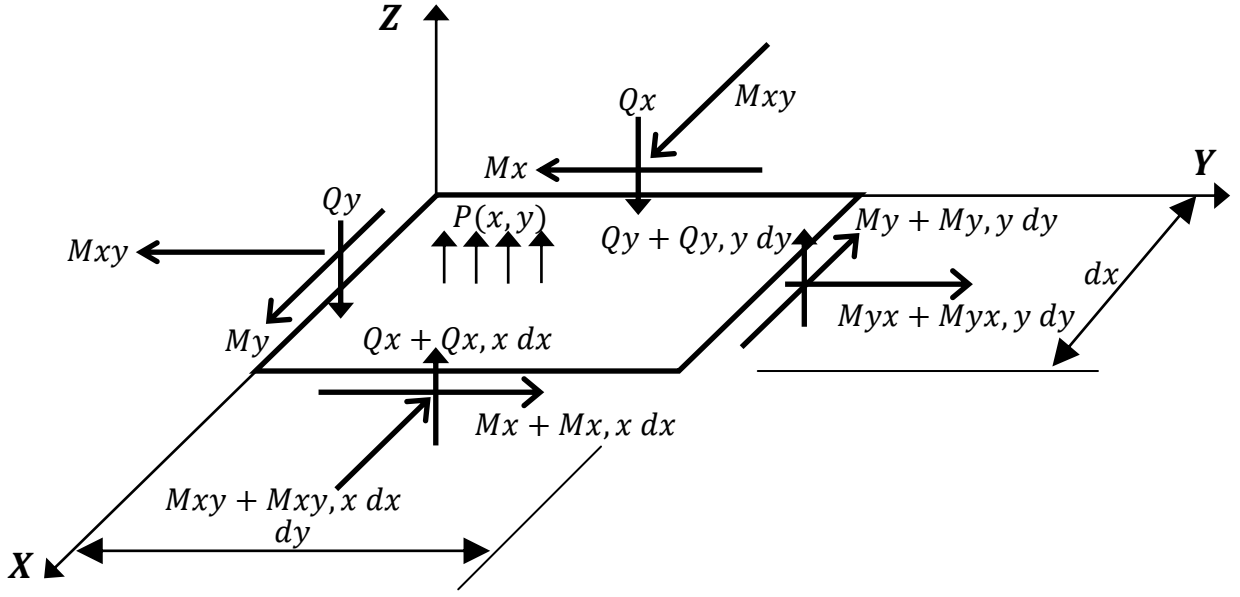


Fig. 3.7 Acciones sobre el elemento diferencial de placa.

Considerando el equilibrio de fuerzas en la dirección Z se tiene la ecuación:

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy - Q_x dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\right) dx - Q_y dx + p dx dy = 0 \quad (3.29)$$

Si se simplifica queda reducida en:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (3.30)$$

Tomando momentos respecto al eje X se obtiene la ecuación:

$$\begin{aligned} M_y dx - \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy\right) dx + M_{xy} dy - \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx\right) dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\right) dx dy \\ + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy \frac{dy}{2} - Q_x dy \frac{dy}{2} + p dx dy \frac{dy}{2} = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Simplificando y despreciando los términos que contienen diferenciales de orden superior la ecuación resulta:

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (3.32)$$

Análogamente, tomando momentos respecto al eje Y se tiene:

$$\begin{aligned} -M_x dy - \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx\right) dy - M_{yx} dx + \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy dx \\ + Q_y dx \frac{dx}{2} + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\right) dx \frac{dx}{2} + Q_y dx \frac{dx}{2} + p dx dy \frac{dx}{2} \\ = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Que después de despreciar los términos con diferenciales de orden superior y de simplificar se obtiene:

$$Q_x = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (3.34)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.32) y (3.34) las expresiones de los momentos flectores y torsos dados en (3.21), (3.22) y (3.26) se obtiene también los esfuerzos cortantes en función de las derivadas de la flecha, quedando:

$$Q_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - D_{xy} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad (3.35)$$

$$Q_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left( D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - D_{xy} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial x} \quad (3.36)$$

Puesto que no hay fuerzas en dirección de los ejes  $X$  e  $Y$  ni tampoco momentos en el eje  $Z$ , las ecuaciones (3.30), (3.32) y (3.34) determinan completamente el equilibrio del elemento diferencial.

### 3.1.6.-Ecuación diferencial de la flexión de placas.

Para obtener la ecuación diferencial que debe cumplir la flecha  $w$  de una placa ortótropa con carga transversal  $p(x, y)$  basta con sustituir las expresiones (2.35) y (2.36) para los esfuerzos cortantes  $Q_x$  y  $Q_y$  en la ecuación de equilibrio (2.30) resultando:

$$-D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + p = 0 \quad (3.37)$$

Agrupando términos queda:

$$\left( D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + (D_1 + D_2 + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = p \quad (3.38)$$

Esta ecuación es considerablemente más complicada que la de flexión de barras porque considera simultáneamente la flexión de los ejes  $X$  e  $Y$ , acoplados además con la contribución de los momentos torsos, a través del término que contiene a las derivadas cruzadas. Un desarrollo más amplio de la flexión de placas ortótropas se puede encontrar en (Rowe 1962).

En el caso de trabajar con un material isótropo se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 E_x &= E_y = E \\
 \nu_{xy} &= \nu_{yx} = \nu \\
 D_x &= D_y = D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \\
 D_1 &= D_2 = \nu D \\
 D_{xy} &= \frac{Gh^3}{6} = \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{h^3}{6} = \frac{Eh^3(1-\nu)}{12(1-\nu^2)} = D(1-\nu)
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Al término  $D$  se le conoce como **rigidez a flexión** de la placa, que resulta directamente proporcional al **módulo de elasticidad**  $E$  y al cubo del **espesor**  $h$ . sustituyendo adecuadamente en (2.38), la ecuación diferencial de la flexión de placas isótropas en coordenadas cartesianas se reduce a:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{p}{D} \tag{3.40}$$

Que también puede escribirse usando en operador bilaplaciano en la forma:

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \tag{3.41}$$

Esta ecuación diferencial fue obtenida por Lagrange en 1811 y es la base de las placas. Su solución determina los calores de la flecha en cada punto, es decir, la distribución del campo de movimientos en dirección transversal. Una vez que se conoce  $w(x, y)$  se pueden operar las expresiones de los esfuerzos que dependen precisamente de sus derivadas y que en el caso de un material isótropo son:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \tag{3.42)b}$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \tag{3.42)b}$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{3.42)c}$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial x} \quad (3.42)d$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial y} \quad (3.42)e$$

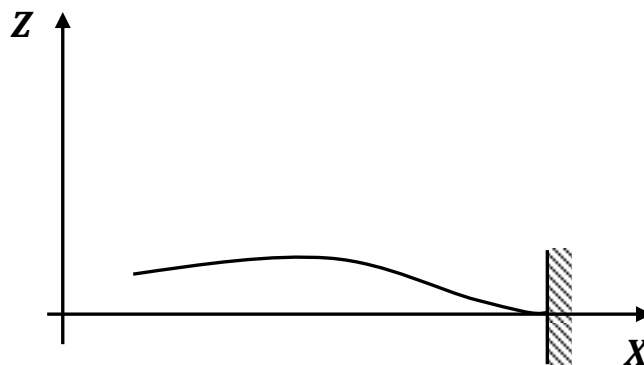
### 3.1.7.- Condiciones de contorno.

Las condiciones de contorno más comunes en placas rectangulares son: borde empotrado, borde apoyado, borde libre, y viga de borde. A continuación se van a analizar con detalle cada una de ellas.

#### 3.1.7.1.- Borde empotrado

Cuando un lado de una placa rectangular se encuentra empotrado, no existe movimiento a lo largo del mismo. Por ejemplo para una placa como la de la figura 2.7 las dimensiones  $a \times b$ , suponiendo empotrado el lado  $x = a$  se cumple que:

$$w|_{x=a} = 0; \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 \quad (3.43)$$



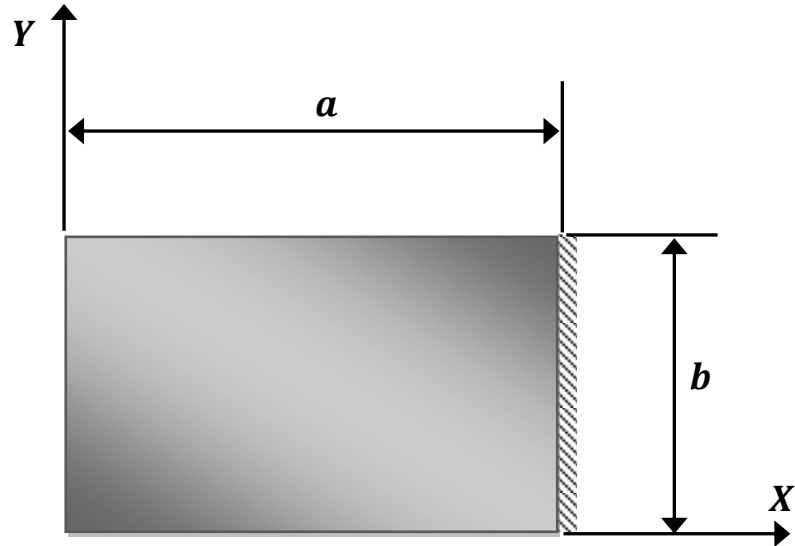


Fig. 3.8 Borde empotrado en  $x = a$

### 3.1.7.2.- Borde apoyado

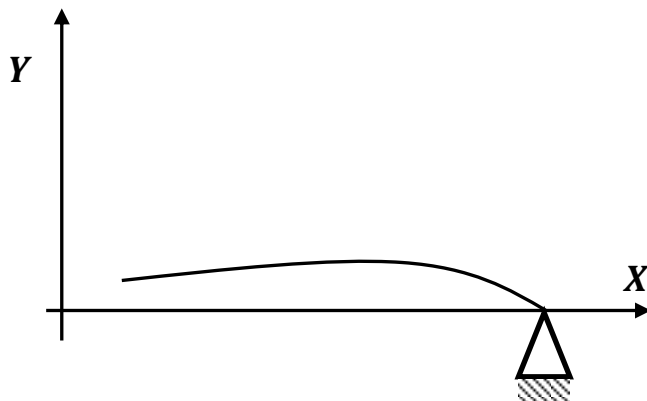
Esta condición de contorno implica que la flecha y el momento flector cuyo eje coincide con ese borde sean nulos. Como se representa en la figura 3.8, en el caso de tener la condición en el lado  $x = a$ , se cumple:

$$w|_{x=a} = 0 \quad (3.43)$$

$$w_x|_{x=a} = 0 \rightarrow \left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]_{x=a} = 0 \quad (3.44)$$

Por ser nula la flecha  $w$  a lo largo de ese borde, se verifica  $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$  y la segunda condición queda reducida en:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = 0 \quad (3.45)$$





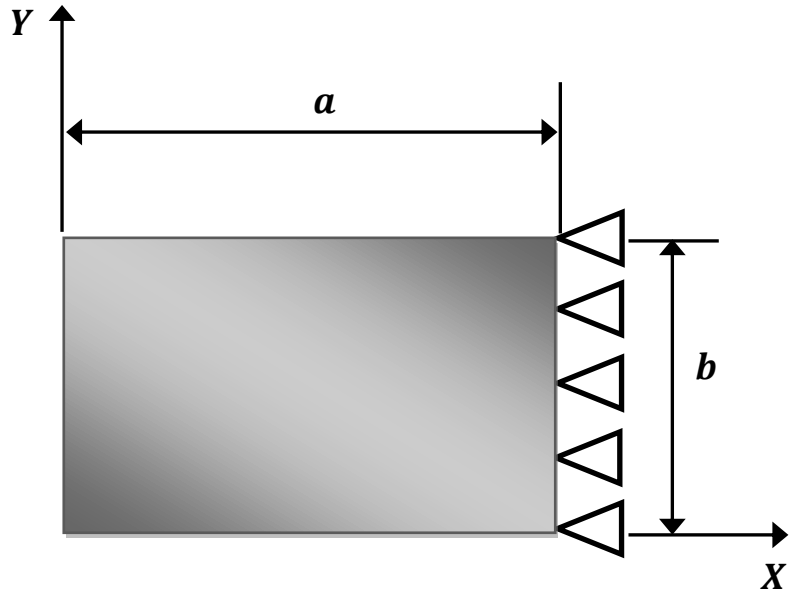


Fig. 3.9 Borde apoyado en  $x = a$ .

### 3.1.7.3.- Borde Libre

En este tipo de borde los esfuerzos son nulos y por ejemplo, suponiendo libre el lado  $x = a$  se tiene:

$$M_x|_{x=a} = 0; \quad M_{xy}|_{x=a} = 0; \quad Q_x|_{x=a} = 0 \quad (3.46)$$

Las dos últimas condiciones pueden agruparse en una mediante la siguiente idea expresada por Kirchhoff. Al representar el momento torsor  $M_{xy}$  como pares de fuerzas sobre la cara lateral de la placa, según muestra la figura 3.10, es posible definir un cortante adicional que equivale a la variación del torsor a lo largo del borde.

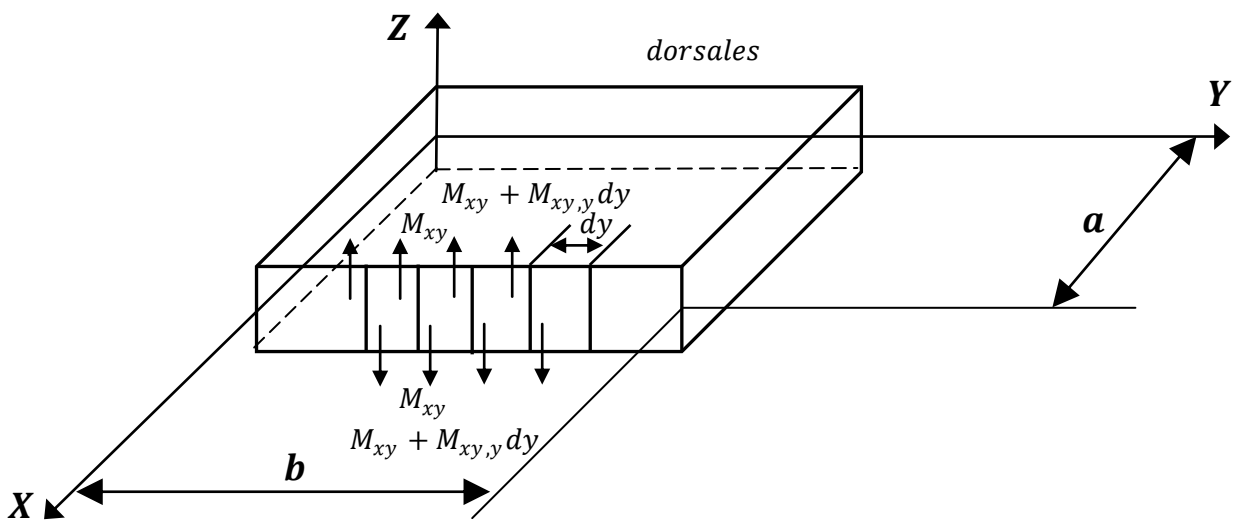


Fig. 3.10 Momento torsor expresado como pares de fuerzas separadas un  $dy$ .

$$Q'_x = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (3.47)$$

La suma de este cortante equivalente  $Q'_x$  con el que ya se había definido anteriormente  $Q_x$  se conoce como reacción de borde  $V_x$ .

$$V_x|_{x=a} = [Q_x + Q'_x]_{x=a} = \left[ Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right]_{x=a} \quad (3.48)$$

Esta reacción debe ser nula para el borde libre  $V_x|_{x=a} = 0$ , por el contrario, en otros tipos de contorno, como los empotrados o los apoyados, toma un valor distinto de cero. Las expresiones para las reacciones de borde en función de las derivadas de la flecha son:

$$V_x|_{borde} = \left( Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{borde} = \left\{ -D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\}_{borde} \quad (3.49)$$

$$V_y|_{borde} = \left( Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \right)_{borde} = \left\{ -D \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \right\}_{borde} \quad (3.50)$$

## 3.2.- Placas rectangulares apoyadas en los cuatro lados

### 3.2.1.- Método de Navier.

Un método analítico muy conocido, que permite obtener la ecuación diferencial de la flexión de placas rectangulares con sus cuatro lados apoyados, es el método de NAVIER. Este método fue presentado en 1820 en la academia de las ciencias Francesa y se basa en la aplicación de desarrollo en serie de Fourier.

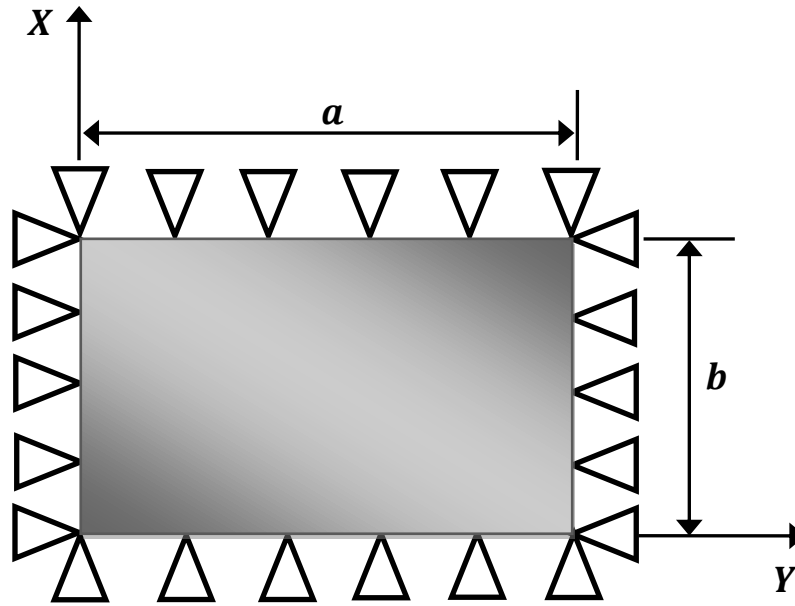


Fig. 3.11 Placa Rectangular apoyada en sus cuatro lados.

Sea una placa rectangular de dimensiones  $a \times b$ , apoyada en todo su contorno, como la que aparece en la figura 3.1. Suponiendo que se encuentra cargada con una distribución de cargas  $p(x, y)$  en dirección perpendicular en su plano medio, la flecha de la placa debe cumplir la siguiente ecuación diferencial:

$$\nabla^4 = \frac{p(x, y)}{D} \quad (3.51)$$

Dónde:

$D$  = rigidez a flexión de la placa.

Por lo tanto la solución que propuso Navier, para desarrollar la serie de Fourier tanto la flecha como la carga en la placa:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.52)$$

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.53)$$

Dónde:

$p_{mn}$  y  $a_{mn}$ : Representan coeficientes a determinar, de forma que por ejemplo:

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (3.54)$$

Éste método propuesto de Navier en 1820 tiene la ventaja de que la flecha cumple automáticamente las condiciones de contorno, en los cuatro bordes apoyados:

$$w|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0; \quad w|_{y=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0 \quad (3.55)$$

Los coeficientes  $a_{mn}$  se calculan de forma que se cumpla la ecuación de campo de las placas. Así sustituyendo la expresión de  $w$  y  $p$  definidas en (3.52) y (3.53), en la ecuación general de la placa se obtiene:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{p}{D} \quad (3.56)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_{mn} \left( \frac{m\pi^4}{a} + 2 \frac{m\pi^2}{a} \frac{n\pi^2}{b} + \frac{n\pi^4}{b} \right) - \frac{p_{mn}}{D} \right\} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0 \quad (3.57)$$

Donde debe cumplirse para cada  $m$  y  $n$ , por lo que para cada término quedará:

$$a_{mn} \pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{p_{mn}}{D} = 0 \quad (3.58)$$

De donde:

$$a_{mn} = \frac{1}{\pi^4 D} \frac{p_{mn}}{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (3.59)$$

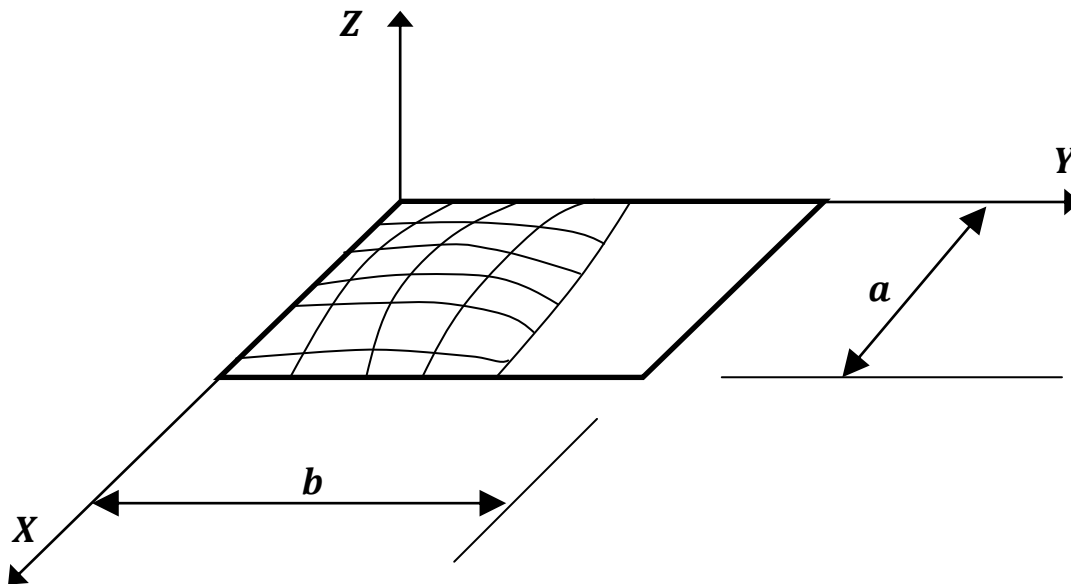
Y la flecha entonces será:

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn}}{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.60)$$

Dónde:

$p_{mn}$  Está definido por (3.54). Debe hacerse notar que puesto que el módulo del seno y coseno son menores que 1 para todo  $x$  e  $y$  la serie es convergente. Esta solución es pues válida para la flexión de placas rectangulares bajo varias clases de cargas.

Como interpretación física de esta ecuación puede considerarse que la superficie real de deflexión de la placa la constituyen una superposición de curvas sinodales en las direcciones  $x$  e  $y$ . Los coeficientes  $a_{mn}$  de la serie son precisamente la amplitud de cada una de estas curvas sinodales y  $m$  y  $n$  el número de semiperiodos de la onda en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente. Por ejemplo el término  $a_{12} \sin \pi x/a \sin 2\pi y/b$  se muestra en la figura.... Naturalmente para conseguir una precisión es necesario aumentar el número de armónicos.



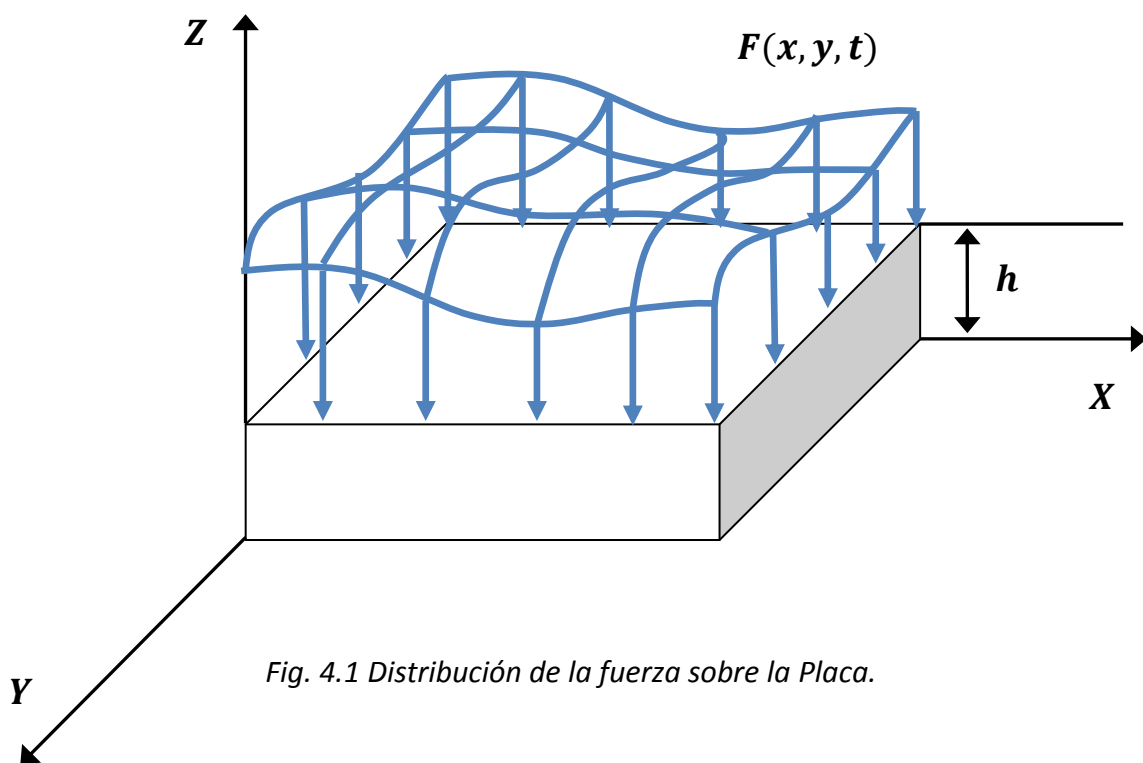
*Fig. 3.12 Placa con los armónicos dibujados.*

Naturalmente conocida la flecha pueden obtenerse los momentos y cortantes en cualquier punto de la placa.

# Placas con amortiguamiento viscoelástico no local

## 4.1.- Introducción a la dinámica de placas

En este apartado se busca plantear el problema de forma genérica, para que luego se aplique las condiciones de contorno de una placa apoyada.



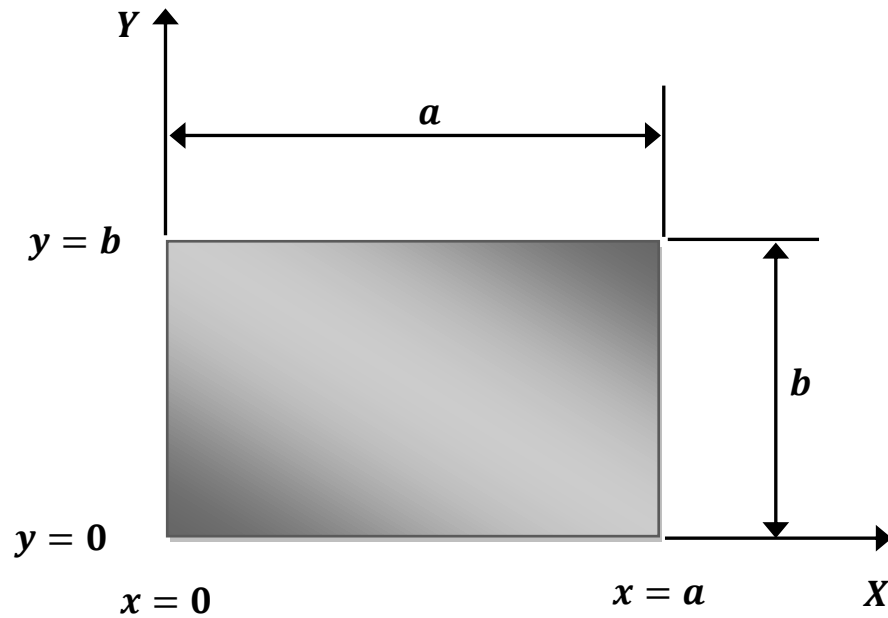
*Fig. 4.1 Distribución de la fuerza sobre la Placa.*

Como se ha podido observar en el capítulo anterior se ha resuelto la placa sin utilizar ningún tipo de amortiguamiento a lo largo de toda la superficie de la placa.

Mientras que en este apartado la placa tiene un ancho  $a(x)$  y largo  $b(y)$ , con una carga distribuida por unidad de superficie  $F(x, y, t)$ . Además de una densidad  $\rho$  y un modulo de Young  $E$ .

Por lo tanto el objetivo final es obtener el movimiento transversal  $w(x, y, t)$  de todos los puntos de la placa en función del tiempo.

Sin embargo para obtener los modos propios, abra que especificar ciertas condiciones de contorno , además de especificar la geometría del mismo: $x = 0, x = a, y = 0, y = b$



*Fig. 4.2 Geometría de la Placa.*

#### **4.1.1.- Borde apoyado**

Esta condición nos dice que, tanto el desplazamiento como el momento flector, cuyo eje coincide con ese borde sean nulos, los cuales se expresan en las siguientes expresiones diferenciales:

$$\begin{bmatrix} w(x, y, t) = 0, & \forall t \\ w(x, y, t) = 0, & \forall t \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} = 0, & \forall t \\ \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} = 0, & \forall t \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

#### 4.1.2.- Borde empotrado

Por otro lado, en esta clase de extremo el giro y el desplazamiento son de valor cero, los cuales cumplen:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} = 0, & \forall t \\ \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} = 0, & \forall t \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} w(y, x, t) = 0, & \forall t \\ w(y, x, t) = 0, & \forall t \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

#### 4.1.3.- Borde libre

Mientras que en un extremo libre se tiene que el momento y el cortante tienen valores nulos, es decir en este tipo de bordes no hay esfuerzos, las cuales se especifican en las siguientes expresiones:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} = 0, & \forall t \\ \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} = 0, & \forall t \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^3 w(x, y, t)}{\partial x^3} = 0, & \forall t \\ \frac{\partial^3 w(x, y, t)}{\partial y^3} = 0, & \forall t \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Como paso siguiente se va a considerar un elemento diferencial de la placa, con tamaño ' $dx$ ' y ' $dy$ ', el cual aplicando la 2da ley de Newton al elemento diferencial, la ecuación que se tendrá que solucionar en función del tiempo (dinámico) será la siguiente:

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, y, t) \quad (4.7)$$



$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, y, t) \quad (4.8)$$

Cabe destacar que en este punto de la solución, es habitual despreciar el efecto del peso, ya que es mucho menor que las otras fuerzas que intervienen en el sistema, ya que es lo mismo decir que el desplazamiento que éste genera es inapreciable y por ello se desprecian. Mientras tanto para que nuestra ecuación de equilibrio se haga dinámica se ha de incorporar el término de la inercia a la ecuación diferencial:

$$\rho h(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Finalmente para resolver la ecuación se tomará como un problema de vibraciones libres, más una solución particular de la ecuación completa.

#### 4.1.4.- Problemas de vibraciones libres

Para hallar el modo propio, se considera que no actúa ninguna fuerza sobre la placa, es decir un problema de vibraciones libres, que también se le denomina problema homogéneo,  $p(x, y) = 0$ , por lo tanto, la ecuación queda de este modo:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4.9)$$

Además en la ecuación se resolverá en función del valor propio del desplazamiento, quedando así:

$$w(x, y, t) = \phi_i(x, y) q_i(t) \quad (4.10)$$

$$D \left( \frac{\partial^4 (\phi_i(x, y) q_i(t))}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 (\phi_i(x, y) q_i(t))}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 (\phi_i(x, y) q_i(t))}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 (\phi_i(x, y) q_i(t))}{\partial t^2} = 0 \quad (4.11)$$

$$D \left( \frac{\partial^4 \phi_i(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi_i(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi_i(x, y)}{\partial y^4} \right) q_i(t) + \rho h \frac{\partial^2 (\phi_i(x, y) q_i(t))}{\partial t^2} \quad (4.12)$$

$$D(\phi_i(x, y)_{xx}^{IV} + 2\phi_i(x, y)_{xy}^{II} \phi_i(x, y)_{yy}^{II} + \phi_i(x, y)_{yy}^{IV}) q_i(t) + \rho h \phi_i(x, y) q_i(t)_t^{II} = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{(\phi_{i_x}^{IV} + 2\phi_{i_x}^{II}\phi_{i_y}^{II} + \phi_{i_y}^{IV})}{\phi_i} = -\frac{\rho h}{D} \frac{q_{i_t}^{II}}{q_i} = \lambda_i^2 = cte \quad (4.14)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{f(x,y)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{f(t)}$$

$$\phi_{i_x}^{IV} + 2\phi_{i_x}^{II}\phi_{i_y}^{II} + \phi_{i_y}^{IV} - \phi_i \lambda_i^2 = 0 \quad (4.15)$$

Como se indicó al principio  $D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$  es independiente de la carga, por lo tanto la flecha se ha reemplazado en función del modo propio, sin embargo hay que tener en cuenta que el  $w = w_h$ , es decir una solución homogénea, que es válida para todas las placas rectangulares con unas determinadas condiciones de contorno en el contorno del mismo.

Por lo tanto para la solución homogénea se supone:

$$\phi_{n,m}(x, y) = f_n(x) \cdot g_m(y) \quad (4.16)$$

Además se puede asumir este movimiento como uno armónico, y usando la separación de variables, la solución quedará:

$$\phi_{n,m}(x, y) = f_n(x) \cdot g_m(y) \cdot q_i(t) = w(x, y, t) = w(x) \cdot w(y) \exp(i\omega t) \quad (4.16)$$

También puede ser reescrito:

$$w(x, y, t) = x_0 y_0 \exp(ik_n t) \exp(i\omega t) \exp(ic_m t) \quad (4.17)$$

Donde  $x_0$  y  $y_0$  son constantes arbitrarias,  $\omega$  es la frecuencia,  $k_n$  y  $c_m$  son el número de ondas, sustituyendo esta expresión dentro de (4.9), se obtiene:

$$[D(k_n^4 + c_m^4 + 2k_n^2 c_m^2) - \rho h \omega^2] x_0 y_0 = 0 \quad (4.18)$$

Donde podemos reescribir:

$$(k_n^2 + c_m^2)^2 = \frac{\rho h}{D} \omega^2 \quad (4.19)$$

O también:

$$\omega = (k_n^2 + c_m^2) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (4.20)$$

Volviendo a la ecuación homogénea (4.16), donde la expresión del tiempo  $\exp(i\omega t)$  quedaba suprimida y la ecuación (4.17) quedará el desplazamiento  $w(x)$  e  $w(y)$ :

$$\begin{bmatrix} w(x) = A_1 e^{-ik_n x} + A_2 e^{ik_n x} + A_3 e^{-ik_n x} + A_4 e^{ik_n x} \\ w(y) = B_1 e^{-ik_n y} + B_2 e^{ik_n y} + B_3 e^{-ik_n y} + B_4 e^{ik_n y} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Sin embargo las expresiones exponenciales se pueden asemejar a una sucesión de senos y cosenos, quedando la **expresión general de modos propios** de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} f_n(x) = A_1 \cdot \cos(k_n x) + A_2 \cdot \sin(k_n x) + A_3 \cdot \cosh(k_n x) + A_4 \cdot \sinh(k_n x) \\ g_m(y) = B_1 \cdot \cos(c_m y) + B_2 \cdot \sin(c_m y) + B_3 \cdot \cosh(c_m y) + B_4 \cdot \sinh(c_m y) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Dónde las constantes  $A_i$  y  $B_i$  se obtienen aplicando las correspondientes condiciones de contorno a  $\phi_{n,m}(x, y)$ , además de imponer que exista al menos una solución no trivial distinta de cero, quedando siempre una de estas constantes con un valor libre.

Por lo tanto las funciones  $\phi_{n,m}(x, y)$  son las llamadas **modos propios de vibración** y los parámetros  $\omega_i$  son denominados **frecuencias propias de vibración**, que son de suma importancia para saber el movimiento transversal de la placa. Además es conveniente saber la propiedad de **ortogonalidad** de los modos propios, el cual será de gran ayuda para resolver el problema amortiguado, siendo las siguientes ecuaciones:

$$\int_0^a \int_0^b \rho h [\phi_n(x, y) \phi_m(x, y)]^2 dx dy = 0, \quad \forall n \neq m \quad (4.22)$$

También es habitual generalizar el valor de los modos propios fijando un valor de la constante libre, de tal forma que se cumple la siguiente expresión:

$$\int_0^a \int_0^b \rho h \phi_n^2(x, y) dx dy = 1, \quad \forall n = 1, 2, 3 \dots n \quad (4.23)$$

#### 4.1.5.- Caso I: Placa apoyada

En este apartado se pretende obtener los modos propios de vibración para el caso de una placa simplemente apoyada, además se procederá los números de ondas  $k_n$  y  $c_m$ .

Antes de iniciar a buscar los modos propios, se plantearán las condiciones de contorno, para los cuales aplicaremos el del borde apoyado, que se explicó en el apartado (4.1.1), el cual será evaluado bajo las medidas geométricas de la placa, siendo las siguientes:

$$\begin{bmatrix} \phi(x = 0) = 0 \\ \phi(x = a) = 0 \\ \phi(y = 0) = 0 \\ \phi(y = b) = 0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi(x = 0)}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi(x = a)}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi(y = 0)}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi(y = b)}{\partial y^2} = 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Como siguiente paso, se procede a sustituir estas condiciones de contorno en la expresión general de modos propios (4.21), para obtener las constantes  $A_i$  y  $B_i$ .

Siendo para el caso de desplazamientos, un caso más sencillo ya que prescinde de realizar derivadas parciales, lo que no sucede al aplicar los momentos en la expresión general.

Aplicación de los desplazamientos en la expresión general:

$$\phi(x = 0) = 0 \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} & [A_1 \cdot \cos(kx) + A_3 \cdot \cosh(kx)] \\ & \quad * [B_1 \cdot \cos(cy) + B_2 \cdot \sin(cy) + B_3 \cdot \cosh(cy) + B_4 \cdot \sinh(cy)] = 0 \\ & [A_1 + A_3] * [B_1 \cdot \cos(cy) + B_2 \cdot \sin(cy) + B_3 \cdot \cosh(cy) + B_4 \cdot \sinh(cy)] = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\phi(x = a) = 0 \quad (4.28)$$

$$[A_1 \cdot \cos(ka) + A_2 \cdot \sin(ka) + A_3 \cdot \cosh(ka) + A_4 \cdot \sinh(ka)] \\ * [B_1 \cdot \cos(cy) + B_2 \cdot \sin(cy) + B_3 \cdot \cosh(cy) + B_4 \cdot \sinh(cy)] = 0 \quad (4.29)$$

$$\phi(y = 0) = 0 \quad (4.29)$$

$$[A_1 \cdot \cos(kx) + A_2 \cdot \sin(kx) + A_3 \cdot \cosh(kx) + A_4 \cdot \sinh(kx)] \\ * [B_1 \cdot \cos(cy) + B_3 \cdot \cosh(cy)] = 0$$

$$[A_1 \cdot \cos(kx) + A_2 \cdot \sin(kx) + A_3 \cdot \cosh(kx) + A_4 \cdot \sinh(kx)] * [B_1 + B_3] = 0 \quad (4.30)$$

$$\phi(y = b) = 0 \quad (4.31)$$

$$[A_1 \cdot \cos(kx) + A_2 \cdot \sin(kx) + A_3 \cdot \cosh(kx) + A_4 \cdot \sinh(kx)] \\ * [B_1 \cdot \cos(cb) + B_2 \cdot \sin(cb) + B_3 \cdot \cosh(cb) + B_4 \cdot \sinh(cb)] = 0 \quad (4.32)$$

Aplicación de los momentos flectores en la expresión general:

$$\frac{\partial^2 \phi(x = 0)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.33)$$

$$[-A_1 \cdot \cos(kx) k^2 - A_2 \cdot \sin(kx) k^2 + A_3 \cdot \cosh(kx) k^2 + A_4 \cdot \sinh(kx) k^2] * [B_1 + B_3] \\ = 0 \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(x = a)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.35)$$

$$[-A_1 \cdot \cos(kb) - A_2 \cdot \sin(kb) + A_3 \cdot \cosh(kb) + A_4 \cdot \sinh(kb)] \\ * [-B_1 \cdot \cos(cy) c^2 - B_2 \cdot \sin(cy) c^2 + B_3 \cdot \cosh(cy) c^2 \\ + B_4 \cdot \sinh(cy) c^2] = 0 \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(y = 0)}{\partial y^2} = 0 \quad (4.37)$$

$$[A_1 + A_3] * [-B_1 \cdot \cos(cy) c^2 - B_2 \cdot \sin(cy) c^2 + B_3 \cdot \cosh(cy) c^2 + B_4 \cdot \sinh(cy) c^2] \\ = 0 \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(y = b)}{\partial y^2} = 0 \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned}
& [A_1 \cdot \cos(kb) + A_2 \cdot \sin(kb) A_3 \cdot \cosh(kb) + A_4 \cdot \sinh(kb)] \\
& * [-B_1 \cdot \cos(cy) c^2 - B_2 \cdot \sin(cy) c^2 + B_3 \cdot \cosh(cy) c^2 \\
& + B_4 \cdot \sinh(cy) c^2] = 0
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Como siguiente paso se procederá a aplicar las propiedades de **normalización** donde obtenemos las siguientes expresiones:

$$\rho h \int_0^a \int_0^b \phi_{m,n}^2(x, y) dx dy = 0, \quad \forall n \neq m \tag{4.41}$$

$$\rho h \int_0^a \int_0^b \phi_{m,n}^2(x, y) dx dy = 1, \quad \forall m = n = 1, 2, 3 \dots n \tag{4.42}$$

Finalmente se obtienen para los números de ondas:

$$k = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, \dots \tag{4.43}$$

$$c = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{4.44}$$

Sustituyendo ambos valores en la omega, se obtiene:

$$\omega = \omega_{m,n} = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \tag{4.45}$$

Dónde:

$a$  y  $b$ : Lados de la placa.

$\rho$ : Densidad de la placa.

$h$ : Espesor de la placa.

$D$ : Rigidéz de la placa

## 4.2.- Cálculo de la placa con amortiguamiento viscoelástico.

Si se toma una placa de lados  $a$  y  $b$ , su masa por unidad de superficie  $\rho h(x, y)$  y con una rigidez a flexión  $D(x, y)$ , dicha placa está sometida a una fuerza por unidad de superficie  $F(x, y, t)$  junto con unas determinadas condiciones iniciales y de contorno en sus extremos. Por lo tanto la solución del problema consiste en calcular el campo de desplazamientos  $w(x, y, t)$  en los puntos de la placa, tomando como modelo de amortiguamiento viscoelástico no local.

A continuación la ecuación general que rige el movimiento de un sistema dinámico lineal amortiguado continuo, se puede expresar de la siguiente forma:

$$L_k w(x, y, t) + (L_e + L_i) \dot{w}(x, y, t) + \rho h \ddot{w}(x, y, t) = F(x, y, t) \quad (4.46)$$

Dónde:

$L_e$ : Operador de amortiguamiento externo.

$L_i$ : Operador de amortiguamiento interno.

$L_k$ : Operador espacial.

Sin embargo, se puede observar que cada operador se trata de manera independiente, ya que el operador de amortiguamiento externo sólo depende de los desplazamientos, mientras que el operador de amortiguamiento interno dependerá de las tensiones internas, esto implica derivadas espaciales del campo de desplazamientos. Estas expresiones se pueden observar de forma general en las siguientes igualdades:

$$L_e \dot{w}(x, y, t) = \iint_{\Omega} \int_0^t C_e(x, y, \xi, \eta, t - \tau) L_s \dot{w}(\xi, \eta, \tau) d\tau d\xi d\eta \quad (4.47)$$

$$L_i \dot{w}(x, y, t) = \iint_{\Omega} \int_0^t C_i(x, y, \xi, \eta, t - \tau) L_s \dot{w}(\xi, \eta, \tau) d\tau d\xi d\eta \quad (4.48)$$

Dónde:

$C_e$ : Función de amortiguamiento externo.

$C_i$ : Función de amortiguamiento interno.

$L_s$ : Operador espacial.

Por otro lado, se plantea condiciones iniciales y de contorno, expresándolas de forma general de la siguiente manera:

$$\begin{cases} w(x, y, 0) = w_0(x, y) \\ \dot{w}(x, y, 0) = \dot{w}_0(x, y) \end{cases} \quad (4.49)$$

$$\begin{cases} M_1 w(x, y, t) = f_1(x, y, t) & , \quad x \in \Gamma_1 \\ M_2 w(x, y, t) = f_2(x, y, t) & , \quad x \in \Gamma_2 \end{cases} \quad (4.50)$$

Dónde:

$M_1$  y  $M_2$ : Operadores espaciales.

$\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ : Dominios espaciales de contorno.

$f_1$  y  $f_2$ : Funciones de contorno.

Sin embargo la ecuación (4.1) no tiene solución general cerrada para la mayoría de funciones de amortiguamiento, a pesar de ello, es posible resolverla para los siguientes casos que se proponen:

$$C_e(x, y, \xi, \eta, t - \tau) = H_e(x, y) c_e(x - \xi, y - \eta) g_e(t - \tau) \quad (4.51)$$

$$C_i(x, y, \xi, \eta, t - \tau) = H_i(x, y) c_i(x - \xi, y - \eta) g_i(t - \tau) \quad (4.52)$$

Estas expresiones se utilizarán como modelos de amortiguamiento viscoelástico para realizar los análisis de aquí en adelante. Donde  $c_e(x - \xi, y - \eta)$  es la **función de kernel espacial**, y representa la influencia espacial de los puntos  $\xi, \eta$  del sólido en un punto  $x, y$  genérico del mismo (término no local espacial). Y en segundo lugar se encuentra la función  $g(t - \tau)$  que recibe el nombre de **función de relajación**, quien introduce la influencia histórica del campo de los desplazamientos en los distintos puntos del sólido (histéresis temporal).

Como paso siguiente se procederá a particularizar las expresiones anteriores, es decir se aplicarán las expresiones anteriores para el caso de la placa con amortiguamiento viscoelástico en un tramo  $[x_1, x_2] \ni [0, a]$  y  $[y_1, y_2] \ni [0, b]$ , dónde se obtiene la siguiente ecuación de movimiento:

$$D \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) w(x, y, t) + \rho h \ddot{w}(x, y, t) + \Gamma(x, y, t) = F(x, y, t) \quad (4.53)$$



Dónde:

$\Gamma(x, y, t)$ : Este término es debido al amortiguamiento viscoelástico, formado por las funciones del núcleo externo e interno.

$$\Gamma(x, y, t) = \Gamma_e(x, y, t) + \Gamma_i(x, y, t) \quad (4.54)$$

Por lo tanto:

$$\Gamma_e(x, y, t) = \iint_{\Omega} \int_0^t c_e(x, y, \xi, \eta, t - \tau) \dot{w}(\xi, \eta, \tau) d\tau d\xi d\eta \quad (4.55)$$

$$\Gamma_i(x, y, t) = \iint_{\Omega} \int_0^t c_i(x, y, \xi, \eta, t - \tau) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \left( \gamma(\xi, \eta) \frac{\partial^4 \dot{w}(\xi, \eta, t)}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \right) d\tau d\xi d\eta \quad (4.56)$$

De donde se puede observar que  $\gamma(\xi, \eta)$  es el coeficiente de amortiguamiento interno, y haciendo prevalecer las condiciones iniciales y de contorno del caso no amortiguado.

Además como se definió con justificación anteriormente las funciones de amortiguamiento  $C(x, y, \xi, \eta, t - \tau)$  es el producto de 3 funciones que reflejan los diferentes aspectos que se tienen en cuenta en este modelo: la parte espacial, temporal y posición  $(x_1, x_2)$ , sin embargo se han agregado 2 variables más  $(y_1, y_2)$ , ya que el estudio para este caso, se trata de una placa, por lo tanto para definir la posición en la placa, hace necesario una segunda coordenada, que para este caso se ha recurrido a 'y', mientras que su respectiva coordenada espacial es 'η', con lo cual se puede obtener el siguiente tratamiento amortiguador:

$$C(x, y, \xi, \eta, t - \tau) = H(x, y) c(x - \xi, y - \eta) g(t - \tau) \quad (4.57)$$

Dónde:

$c(x, y, \xi, \eta)$ : Función de kernel espacial, que representa el aspecto no local en el espacio.

$g(t - \tau)$ : Función de relajación, influencia de la historia de movimientos de la placa.

$H(x, y)$ : Función que se utiliza para definir el dominio espacial en el que hay que considerar el efecto amortiguador, que habitualmente se considera coincidente con el intervalo  $[x_1, x_2]$  y  $[y_1, y_2]$ , que tomará un valor constante  $H_0$  si  $x_1, y_1 \leq x, y \leq x_2, y_2$  y un valor nulo en el resto de los puntos. Por otro lado para las funciones de kernel espacial como el de relajación, se pueden elegir diferentes con el fin de asemejarse mejor al comportamiento real de la placa.

## 4.3.- Modelos espaciales de la función de amortiguamiento

### 4.3.1.- Amortiguamiento viscoso local

Mediante la función  $C(x, y, \xi, \eta, t - \tau)$  se puede particularizar el modelo de amortiguamiento para el caso de amortiguamiento viscoso local, donde deja de influir el aspecto no local del modelo y donde deja de influir la historia del campo de desplazamientos de la viga, el cual se puede observar definiendo las siguientes identidades:

$$c(x - \xi, y - \eta) = \delta(x - \xi, y - \eta) \quad (4.58)$$

$$g(t - \tau) = \delta(t - \tau) \quad (4.59)$$

Por lo tanto se cumplirá para cualquier función  $\chi(\xi, \eta, \tau)$  la siguiente igualdad:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_0^t c_e(x, y, \xi, \eta, t - \tau) \chi(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau = H(x, y) \chi(x, y, t) \quad (4.60)$$

### 4.3.2.- Amortiguamiento viscoelástico local

$$c(x - \xi, y - \eta) = \delta(x - \xi, y - \eta) \quad (4.61)$$

Entonces se tiene:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_0^t c_e(x, y, \xi, \eta, t - \tau) \chi(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau = H(x, y) \int_0^t g(t - \tau) \chi(x, y, \tau) d\xi d\eta d\tau \quad (4.62)$$

### 4.3.3.- Amortiguamiento viscoso no local.

$$g(t - \tau) = \delta(t - \tau) \quad (4.63)$$

Por lo tanto:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_0^t c_e(x, y, \xi, \eta, t - \tau) \chi(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau = H(x, y) \int_{x_1}^{x_2} c(x - \xi, y - \eta) \chi(x, y, \tau) d\xi d\eta d\tau \quad (4.64)$$

#### 4.4.- Función de kernel espacial

Generalmente, las funciones de kernel espacial y la de relajación permiten diferentes expresiones alternativas. Para el caso de la función de kernel espacial, por su significado debe ser continua, no negativa, dónde  $(x - \xi, y - \eta)$  es una distancia entre los puntos  $(x, y)$  y  $(\xi, \eta)$ . Por simplicidad se normaliza de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [c(x, y)]^2 dx dy = 1 \quad (4.65)$$

Por consiguiente algunos de los modelos utilizados, para la función de kernel espacial, son los siguientes:

##### 4.4.1.- Modelo 1 – Decrecimiento exponencial

$$C(x, y, \xi, \eta) = \frac{\alpha^2}{2\pi} e^{-\alpha d} \quad (4.66)$$

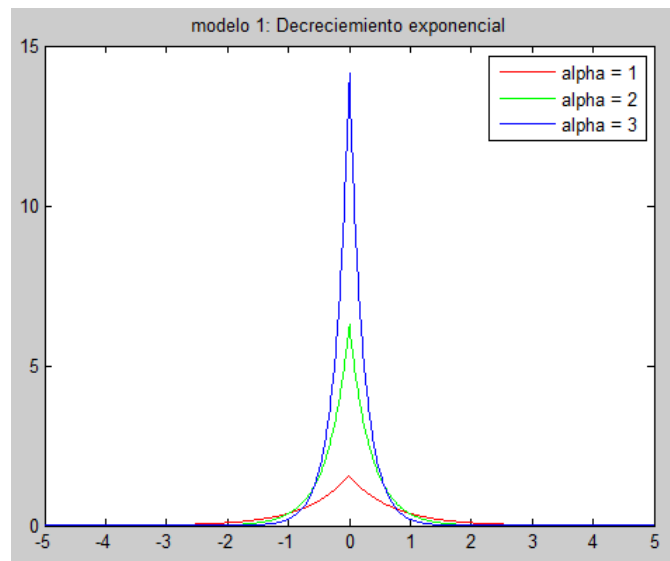


Fig. 4.1 Modelo 1 para la función de kernel: Decrecimiento exponencial.

Dónde:

$d = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ : es la distancia entre dos puntos  $(x, y)$  y  $(\xi, \eta)$ .

$\alpha$ : Coeficiente de Kernel espacial que indica el peso, es decir la influencia que tendrán los puntos amortiguados que se encuentran al entorno de dicho punto elegido. [ $m^{-1}$ ]

#### 4.4.2.- Modelo 2 - Función de error.

$$C(x, y, \xi, \eta) = \frac{\alpha^2}{2\pi} e^{-\alpha^2 \frac{d^2}{2}} \quad (4.67)$$

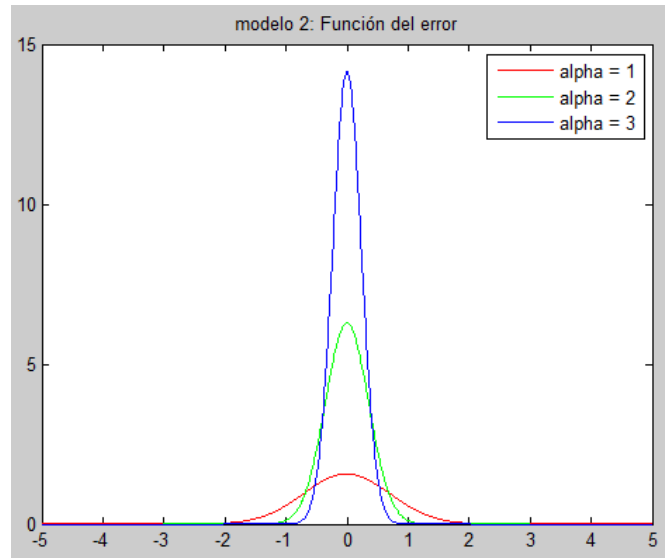


Fig. 4.2 Modelo 2 para la función de kernel: Función del error.

#### 4.5.- Función de Relajación.

Para el caso de la función de relajación también puede tomar diferentes modelos, entre las que figuran las siguientes expresiones de forma exponencial y gaussiana normalizadas:

$$g_1(t - \tau) = \frac{\sum_{r=1}^M g_r \mu_r e^{-\mu_r(t-\tau)}}{\sum_{r=1}^M \beta_r} \quad (4.68)$$

$$g_2(t - \tau) = \frac{\sum_{r=1}^M \beta_r \sqrt{\mu_r} e^{-\mu_r(t-\tau)^2}}{\sum_{r=1}^M \beta_r} \quad (4.69)$$

Dónde:

$\mu_r$ : Coeficiente de relajación, el cual depende de las propiedades mecánicas del material viscoelástico, y se determinan experimentalmente. [ $s^{-1}$ ]

$\beta_r$ : Es el peso asignado a cada sumando de las expresiones anteriores. A partir de  $g(t - \tau)$  se puede definir un *tiempo de relajación característico*  $\theta_c$  que será nulo para un material viscoso e infinito para un material perfectamente elástico:

$$\theta_c = \int_0^{\infty} t g(t) dt \quad (4.70)$$

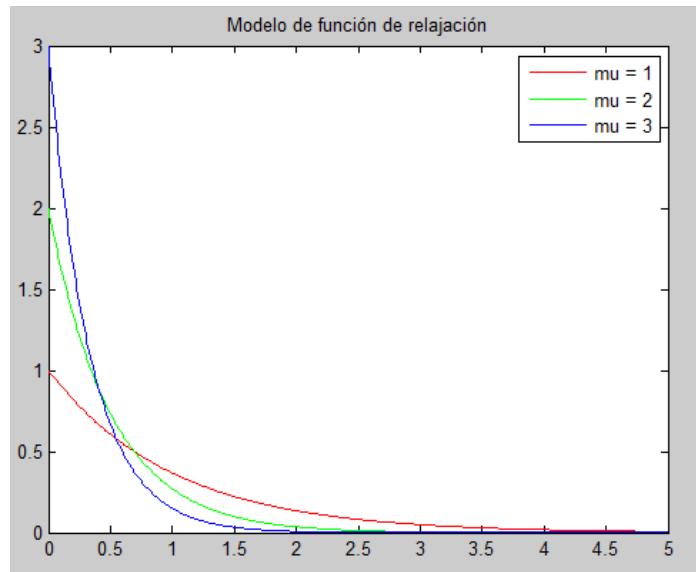
La función de relajación que se utilizará en el presente trabajo será una expresión sencilla del primer modelo anterior.

$$g(t - \tau) = \mu e^{-\mu(t-\tau)} \quad (4.71)$$

$$\theta_c = \frac{1}{\mu} \quad (4.72)$$

Se puede ver que para grandes valores de  $\mu$  la relajación del material se produce más rápidamente, en particular se reproduce el modelo de material viscoso para valores muy altos de este parámetro:

$$\mu \rightarrow \infty \Rightarrow g(t - \tau) \rightarrow \delta(t - \tau) \quad (4.73)$$



*Fig.4.3 Modelo de función de relajación.*

# Ecuación de movimiento y sus métodos de resolución

Para el desarrollo de la ecuación de movimiento se ha recurrido a la transformada de Laplace y al de Galerkin, que a continuación se explicará detalladamente cada una de ellas.

## **5.1.- Transformada de Laplace**

El inicio de la solución de la ecuación de movimiento es a través de éste método, llevando al dominio de Laplace la ecuación, es decir aplicando la transformada de Laplace a toda la ecuación de movimiento. Por lo tanto se denota las transformadas de Laplace  $W(x, y, s)$  y  $G(s)$  provenientes de  $w(x, y, t)$  y  $g(t)$  respectivamente. Donde se obtiene:

Término de amortiguamiento externo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\Gamma_e(x, y, t)] &= \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} H_e(x, y) c_e(x - \xi, y - \eta) \cdot \mathcal{L} \left[ \int_0^t g_e(t - \tau) \dot{w}(\xi, \eta, \tau) d\tau \right] d\xi d\eta \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} H_e(x, y) c_e(x - \xi, y - \eta) \cdot \mathcal{L}[g_e(t)] \cdot \mathcal{L}[\dot{w}(\xi, \eta, \tau)] d\xi d\eta \\ &= G_e(s) \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} H_e(x, y) c_e(x - \xi, y - \eta) [sW(\xi, \eta, s) - w(\xi, \eta, 0)] d\xi d\eta \quad (5.1)\end{aligned}$$

Término de amortiguamiento interno:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\Gamma_i(x, y, t)] &= \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} H_i(x, y) c_i(x - \xi, y - \eta) \cdot \mathcal{L} \left[ \int_0^t g_i(t - \tau) [\gamma(\xi, \eta) \dot{w}''(\xi, \eta)]'' d\tau \right] d\xi d\eta \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} H_i(x, y) c_i(x - \xi, y - \eta) \cdot \mathcal{L}[g_i(t)] \cdot \mathcal{L}[[\gamma(\xi, \eta) \dot{w}''(\xi, \eta)]''] d\xi d\eta\end{aligned}$$

$$= G_i(s) \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} H_i(x, y) c_i(x - \xi, y - \eta) [\gamma(\xi, \eta) s W''(\xi, \eta, s) - (w(\xi, \eta, 0))''] d\xi d\eta \quad (5.2)$$

Término independiente:

$$\mathcal{L}[F(x, y, t)] = \bar{F}(x, y, s) \quad (5.3)$$

Por lo tanto la transformada de la Laplace de la ecuación de movimiento, queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & D \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) W^4(x, y, s) + s^2 \rho h W(x, y, s) \\ & + s G_e(s) \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} H_e(x, y) c_e(x - \xi, y - \eta) W(\xi, \eta, s) d\xi d\eta \\ & + s G_i(s) \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} H_i(x, y) c_i(x - \xi, y - \eta) [\gamma(\xi, \eta) s W''(\xi, \eta, s)]' d\xi d\eta \\ & = \bar{F}(x, y, s) + \bar{K}(x, y, s) \end{aligned} \quad (5.4)$$

En este caso las funciones  $\bar{F}(x, y, s) + \bar{K}(x, y, s)$  son conocidas.

## 5.2.- Método de Galerkin

En este paso se desarrolla  $W(x, y, s)$  como una serie de productos de funciones, llamado Galerkin:

$$W(x, y, s) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(s) \phi_j(x, y) \quad (5.5)$$

Escogiendo por simplicidad, las funciones  $\phi_j(x, y)$  que se obtendrían en el problema no amortiguado asociado, y que se pueden calcular sin dificultad. La base de funciones  $\phi_j(x, y)$  debe cumplir únicamente las condiciones de contorno geométricas, y no necesariamente las asociadas al extremo libre en el caso que este existiera. El motivo de la elección de los modos propios no amortiguados reside en la condición de ortogonalidad expuesta con anterioridad, ya que este hecho simplifica de manera importante los cálculos posteriores, como se justificarán más adelante.



$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} \left( q_j(s) \int_0^a \int_0^b D \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) q_j^4(x, y) \phi_k(x, y) dy dx \right) \\
& + s^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left( q_j(s) \int_0^a \int_0^b \rho h \phi_j(x, y) \phi_k(x, y) dy dx \right) \\
& + s G_e(s) \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^b \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} H_e(x, y) c_e(x - \xi, y - \eta) \phi_j(\xi, \eta) \phi_k(x, y) d\eta d\xi dy dx \\
& + s G_i(s) \sum_{j=1}^{\infty} \left( q_j \int_0^a \int_0^b \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} H_i(x, y) c_i(x - \xi, y \right. \\
& \left. - \eta) \left[ \gamma(\xi, \eta) \left( \phi_j''(\xi, \eta, s) \phi_k(x, y) \right) \right]'' d\xi d\eta dx dy \right) \\
& = \bar{F}(x, y, s) + \bar{K}(x, y, s)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Como paso siguiente para simplificar la expresión, se utiliza la condición de ortogonalidad de los modos propios no amortiguados para el término de la masa y la rigidez.

$$(1) \sum_{j=1}^{\infty} \left( q_j(s) \int_0^a \int_0^b \rho h \phi_j(x, y) \phi_k(x, y) dy dx \right) = \sum_{j=1}^{\infty} (q_j(s) \delta_{jk}) = q_k(s) \tag{5.7}$$

$$(2) \sum_{j=1}^{\infty} \left( q_j(s) \int_0^a \int_0^b D q_j^4(x, y) \phi_k(x, y) dy dx \right) = \sum_{j=1}^{\infty} (q_j(s) \omega_j^2 \delta_{jk}) = q_k(s) \omega_k^2 \tag{5.8}$$

Con lo cual se obtiene finalmente la siguiente ecuación de matrices:

$$[P(s)] \cdot \{q(s)\} = \{f(s)\} + \{k(s)\} \tag{5.9}$$

Dónde:

$$[P(s)] = s^2 [M] + s G_i(s) [C_i] + s G_e(s) [C_e] + [K] \tag{5.10}$$

$$\{q(s)\} = [q_1(s) q_2(s) \dots q_N(s)]^T \tag{5.11}$$

$$\{f(s)\} = [f_1(s) f_2(s) \dots f_N(s)]^T, \quad f_k(s) = \int_0^a \int_0^b \bar{F}(x, y, s) \phi_k(x, y) dx dy \tag{5.12}$$

$$\{k(s)\} = [k_1(s) k_2(s) \dots k(s)]^T, \quad k_k(s) = \int_0^a \int_0^b \bar{K}(x, y, s) \phi_k(x, y) dx dy \tag{5.13}$$

Donde  $M, C_e$  y  $K$  son matrices cuyos elementos pueden ser calculados por medio de las siguientes expresiones

$$M_{kj} = \rho h \int_0^a \int_0^b \phi_j(x, y) \phi_k(x, y) dx dy = \delta_{kj} \quad (5.14)$$

$$C_{kj}^{(e)} = H_0^{(e)} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} c_e(x - \xi, y - \eta) \phi_j(\xi, \eta) \phi_k(x, y) d\xi d\eta dx dy \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} K_{kj} &= D \int_0^a \int_0^b \phi_k(x, y) \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \phi_j(x, y) dx dy \\ &= D \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) dx dy \\ &\quad + \overline{K_{kj}}^* \end{aligned} \quad (5.16)$$

Dónde:

$\overline{K_{kj}}^* = 0$ , para las condiciones de contorno libre, simplemente apoyada y empotrada.

Finalmente para obtener las funciones  $q_k(t)$ , se ha tenido que desarrollar el sistema de matrices, para luego aplicar la inversa de Laplace, el cual se puede observar en la siguiente expresión:

$$\{q(t)\} = \mathcal{L}^{-1}[\{q(s)\}] = \mathcal{L}^{-1}[[P(s)]^{-1} \cdot \{f(s)\}] + \mathcal{L}^{-1}[[P(s)]^{-1} \cdot \{k(s)\}] \quad (5.17)$$

# Ejemplos numéricos

## **6.1.- Referencias y pasos para la solución**

Después de aplicar la Transformada de Laplace junto al Método de Galerkin, con el objetivo de plantear y solucionar diferentes casos, que ahora se va a proceder a analizarlos, viendo la influencia de los parámetros que intervienen en ellos.

Para ello, se tendrá en cuenta diferentes condiciones de contorno, es decir se tendrá los siguientes casos: placa biapoyada y placa empotrada en el contorno, como se dijo anteriormente, que se irá variando cada uno de los parámetros que intervienen, para que al final comparar los resultados entre ellos y obtener conclusiones de la influencia de amortiguamiento para cada caso.

Por otro lado el problema se resolverá fijando unos parámetros estándar como punto de partida, para la geometría y para el material base, que luego se irá variando cada parámetro para obtener resultados, los cuales poder comparar.

Para facilitar los cálculos en todos los casos se utilizará la unidad para fuerza por unidad de superficie  $F(x, y, t) = 1 \text{ N/m}^2$ , así como también se ha considerado sólo el amortiguamiento externo y despreciando el interno en todos los casos.

Sin embargo cabe destacar, que sería inviable hacer la comparación de todos los puntos de la placa utilizando la expresión  $w(a, b, t)$ , ya que la expresión es bastante compleja como para utilizarla en cada punto de la placa, esta definición se va a demostrar más adelante con la finalidad de justificar el innecesario cálculo en todos los puntos de la placa.

Ya que, después de justificar la elección del centro de la placa, los resultados que posteriormente se van a analizar, se harán de forma más eficaz.

Una vez elegido la posición geométrica de la placa, también se puede comparar las curvas  $w(a/2, b/2, t)$  obtenidas con los valores iniciales del problema y también variando los mismos, sin embargo estas curvas serán mayores para los casos no amortiguados y menores para los amortiguados. Cabe mencionar que si se ha elegido el centro de la placa es por comodidad.

Por otro lado sabiendo que en cada punto de la placa  $w(a, b, t)$  se puede hallar su desplazamiento para el caso amortiguado y para el no amortiguado, se puede definir

una relación entre ellos, es decir un parámetro. Este parámetro se define como  $\eta$  al que se denomina **capacidad de amortiguamiento**, el cual relaciona cada curva  $w(a, b, t)$  correspondiente a cualquier punto de la placa amortiguada, con las mismas condiciones de contorno, misma fuerza por unidad de superficie, misma geometría y mismas propiedades del material base, con la curva del caso no amortiguado. Entonces se puede definir  $\eta$  de la siguiente forma:

$$\eta \equiv 1 - \frac{w_{m\acute{a}x} - w_{ref}}{w_{m\acute{a}x}^* - w_{ref}} = \frac{w_{m\acute{a}x}^* - w_{m\acute{a}x}}{w_{m\acute{a}x}^* - w_{ref}}$$

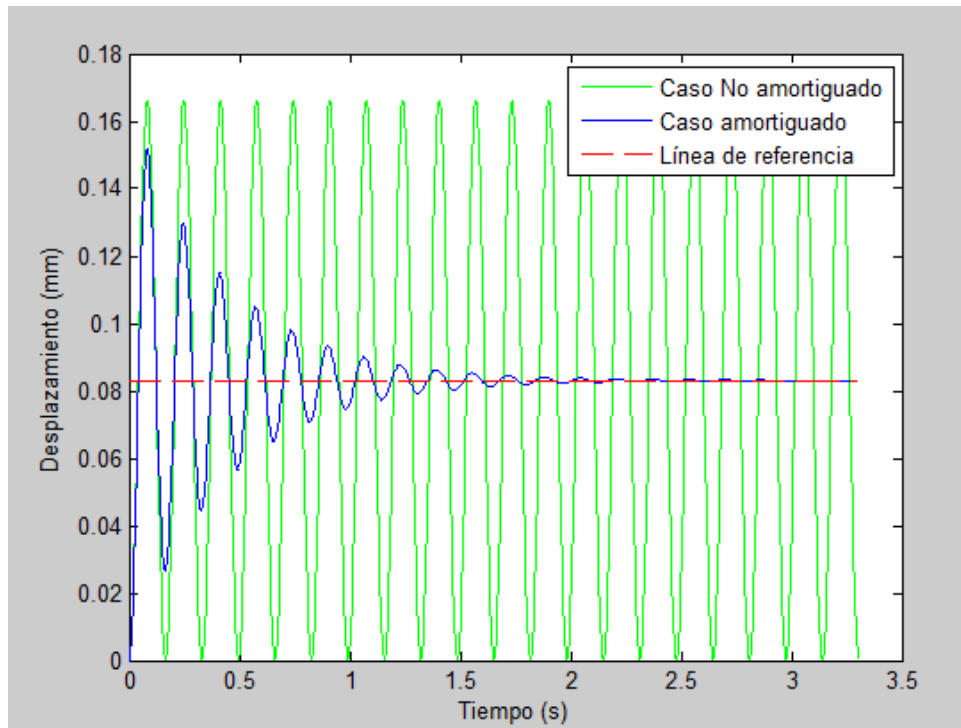
Dónde:

$w_{m\acute{a}x}$ : Es el valor máximo de la función  $w(x, y, t)$  obtenida para el **caso amortiguado**.

$w_{m\acute{a}x}^*$ : Es valor máximo para el **caso no amortiguado** con las mismas condiciones.

$w_{ref}$ : Este parámetro es un desplazamiento de referencia que se corresponde con el punto de equilibrio.

A continuación, en la figura 6.1 se puede observar mediante un ejemplo, la aplicación de este parámetro.



*Fig. 6.1 Imagen que justifica la aplicación de  $\eta$ .*

Se puede observar dos curvas que en este caso corresponden al centro de la placa, la verde corresponde al desplazamiento con unas condiciones de contorno explicadas anteriormente, así como el material, pero esta curva está en ausencia de amortiguamiento; mientras que la curva azul representa el desplazamiento del mismo punto de placa, pero para el caso amortiguado y por último se puede observar la línea roja de referencia.

Por lo tanto, para  $\eta = 0$ , corresponde para una placa en ausencia de amortiguamiento, mientras que para  $\eta = 1$ , corresponde para un amortiguamiento máximo, que se podría obtener cuando el desplazamiento máximo es igual al de equilibrio.

Para reducir cálculos cabe destacar ciertas aclaraciones sobre el valor de  $N = (n^{\circ} \text{ de términos})$ ; el valor de  $N$  corresponde a la serie de Galerkin, el cual nos dará un resultado más exacto cuanto mayor sea, sin embargo se explicará más adelante que es suficiente con  $N = 1$ .

### Parámetros de referencia

Para analizar cada caso, se partirá de unos datos de referencia: material, amortiguadores y geométricos, que se pueden observar a continuación:

- Geometría:
  - Longitud de la placa:  $a = 2m$
  - Ancho de la placa:  $b = 2m$
  - Espesor de la placa:  $h = 0,005m$
- Material Base:
  - Densidad:  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$
  - Módulo de Young:  $E = 70 \text{ GPa}$
  - Coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,3$
- Amortiguamiento externo:
  - Extensión en la longitud de la placa:  $x_1 = a/4$  ,  $x_2 = 3a/4$
  - Extensión en el ancho de la placa:  $y_1 = a/4$  ,  $y_2 = 3a/4$
- Función de Kernel Espacial:

$$C(x, y, \xi, \eta) = \frac{\alpha^2}{2\pi} e^{-\alpha d}$$

$$d = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

$$\alpha = 5 \text{ m}^{-1}$$

- Función de Relajación:

$$g(t - \tau) = \mu e^{-\mu(t-\tau)}$$

$$\mu = 220 \text{ s}^{-1}$$

- $H(x, y) = H_0$  si  $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$ ; 0 en el resto

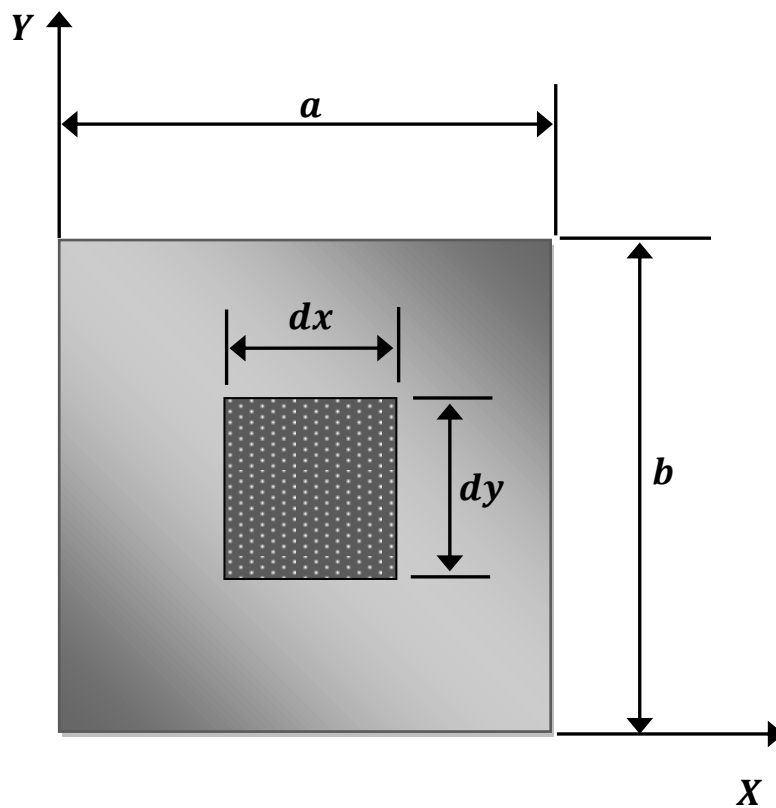
$$H_0 = 140 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$$

- Fuerza exterior:  $F(x, y, t) = 1 \text{ N}/\text{m}^2$

- Condiciones iniciales:

Desplazamiento:  $w(x, y, 0) = 0$

Velocidad:  $\dot{w}(x, y, 0) = 0$



*Fig. 6.2 Imagen de las disposiciones geométricas de la placa y el elemento amortiguador.*

Como se puede observar en la figura 6.2, se muestran la distribución geométrica tanto de la placa como el del material amortiguador.

## 6.2.- Caso 1: Condiciones de contorno - Apoyada en el contorno

### 6.2.1.- Modos propios no amortiguados

Para iniciar la solución del problema, primero vamos a determinar los modos propios del problema no amortiguado, es decir vamos a obtener el conjunto de funciones  $\{\phi_{m,n}\}_{m=1,n=1}^{\infty}$ , que para resolver este caso, el modo propio es el siguiente:

$$\phi_{m,n}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{\rho abh}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

### 6.2.2.- Solución para un problema genérico N = 4

A continuación, se procede a resolver el problema para la placa amortiguada apoyada en el contorno, para ello se ha elegido  $N_1 = 2$  y  $N_2 = 2$  para los términos de Galerkin, es decir  $N = 2 \times 2 = 4$ .

$$M = \begin{pmatrix} 0,999999521 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,000000818 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,00000013 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9999991467 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1445,410317 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 23126,56482 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 117078,2344 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 370025,03715 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.58330157 & -1.054995e-016 & -3.816391e-017 & 4.6200288e-018 \\ -1.309893e-016 & 0.1937276 & 1.2859965e-017 & -3.9681799e-017 \\ 6.5919492e-017 & 1.9471385e-019 & 0.19370041 & -1.443039e-017 \\ 1.9294373e-018 & -3.122502e-017 & -2.076385e-017 & 0.0716485213 \end{pmatrix}$$

Como se puede observar, las matrices obtenidas son diagonales, esto reduce la solución del problema, para ello se va proceder a desarrollar las matrices planteando las ecuaciones 3.9 y 3.10:

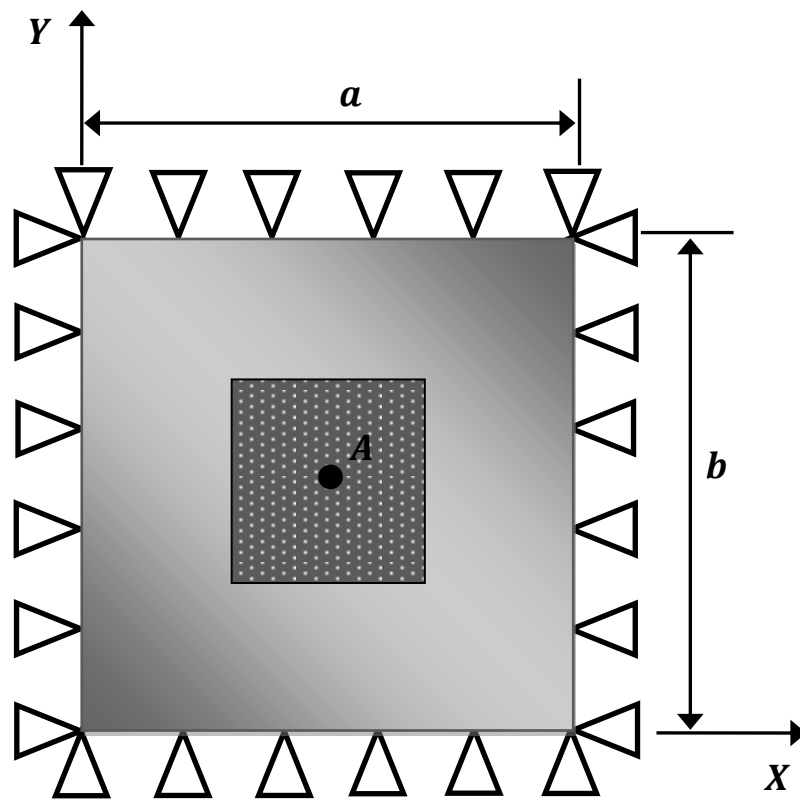
$$[P(s)] \cdot \{q(s)\} = \{f(s)\} + \{k(s)\} \quad \text{dónde} \quad [P(s)] = s^2[M] + sG(s)[C] + [K]$$

$$\{f(s)\} = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} 0,441218030 \\ 3,68517562E-18 \\ 0,049024269 \\ -5,5381933E-19 \end{pmatrix}, \quad \{k(s)\} = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G(s) = \frac{220}{s + 220}$$

Después de hallar las matrices correspondientes a la ecuación de movimiento, que como se ha especificado en el apartado anterior  $N = 4$  (términos de Galerkin), se va a proceder a justificar ciertas condiciones en función de los resultados, para optar  $N = 1$ , el cual influirá sobre la capacidad de amortiguamiento, así como también se justificará la posición de la placa a analizar para los casos mencionados.

#### 6.2.2.1.- Justificación para $N = 1$ en el punto medio de la placa

Lo primero que se obtiene de la ecuación anterior son los términos  $\{q(s)\}$ , para que, posteriormente al aplicar la Transformada de Laplace Inversa, se obtenga el vector  $\{q(t)\}$  por lo tanto se proceda a evaluar los 4 términos del desplazamiento  $w(a/2, b/2, t)$ .



*Fig. 6.3 Punto en el centro de la placa.*



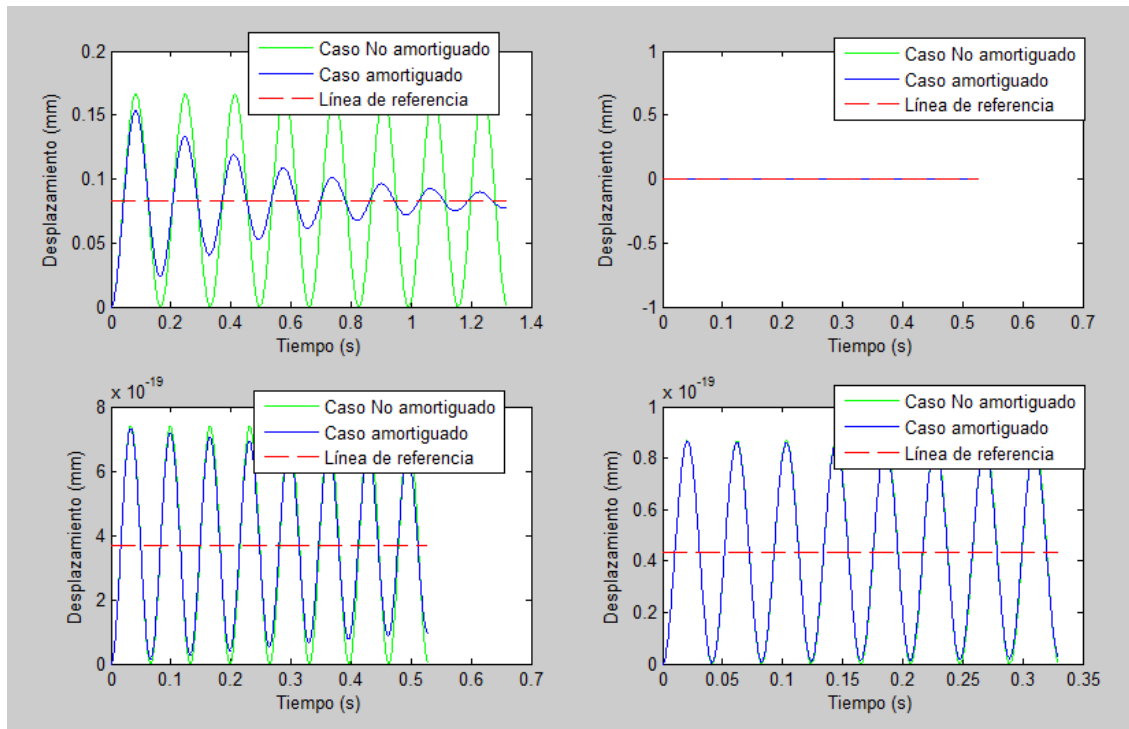


Fig.6.4 Desplazamiento en el punto medio de la placa, para cada frecuencia.

Como se puede observar en la figura 6.4, empezando desde arriba a abajo y de izquierda a derecha. Cada uno de los desplazamientos corresponde a cada término de la diagonal de la matriz ( $N = 4$ ). Sin embargo las subgráficas 2, 3 y 4, representan unos desplazamientos ínfimos, esto se debe a que el mayor peso del amortiguamiento siempre recae sobre el primer término de la matriz, a continuación se darán los valores de los desplazamientos tanto para el caso amortiguado como el no amortiguado:

Caso no amortiguado	Caso amortiguado
$w_1^* = 0,1661333 \text{ mm}$	$w_1 = 0,1533344 \text{ mm}$
$w_2^* = 0 \text{ mm}$	$w_2 = 0 \text{ mm}$
$w_3^* = 7,398082e - 019 \text{ mm}$	$w_3 = 7,325629e - 019 \text{ mm}$
$w_4^* = 8,672448e - 020 \text{ mm}$	$w_4 = 8,65516e - 020 \text{ mm}$

Tabla 6.1. Comparación del desplazamiento entre caso amortiguado y no amortiguado.

Por lo tanto para hallar la flecha en el punto medio, habrá que sumar las 4 flechas (caso amortiguado) obtenidas de la ecuación.

$$w(a/2, b/2, t) = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 0,1533344 \text{ mm}$$

Como siguiente paso, para calcular el peso que tiene el desplazamiento 1 respecto de la flecha total, se procederá a especificar en porcentaje su influencia.

$$\% w_1 = \frac{w_1}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4} \times 100\% = 99.8 \%$$

En consecuencia, después de saber el peso que tiene  $w_1$  respecto del total, que es 99,8% , se puede llegar a la conclusión de que, es suficiente optar para  $N = 1$ , no haciendo falta que  $N$  sea mayor que 1 para obtener resultados de alta precisión.

Por lo tanto, a partir de este resultado se procederá a analizar las influencias de la geometría y características del material viscoelástico, en el desplazamiento y la capacidad de amortiguamiento para  $N = 1$ .

#### 6.2.2.2.- Influencia de $N = 1$ en la capacidad de amortiguamiento

Por otro lado cabe destacar que al elegir  $N = 1$ , se puede concluir que  $\eta$ (*capacidad de amortiguamiento*), no depende de la posición geométrica que se elija de la placa, como se puede comprobar en la siguiente expresión:

$$w_{m\acute{a}x}^* = 2 \cdot w_{ref}$$

$$\eta = \frac{w_{m\acute{a}x}^* - w_{m\acute{a}x}}{w_{m\acute{a}x}^* - w_{ref}} = \frac{2 \cdot w_{ref} - w_{m\acute{a}x}}{w_{ref}} = 2 - \frac{w_{m\acute{a}x}}{w_{ref}}$$

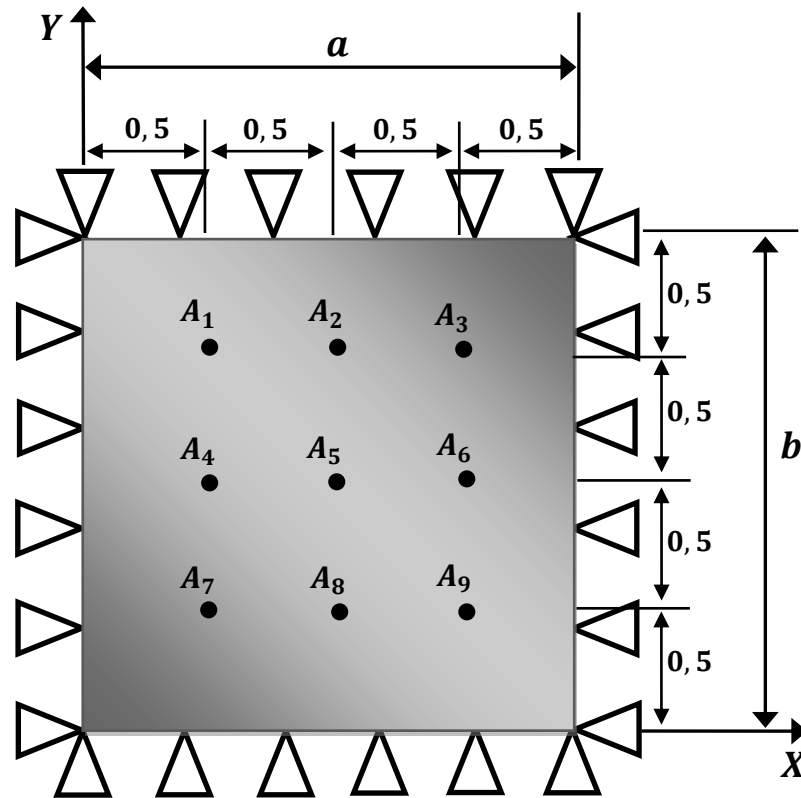
Teniendo en cuenta que  $N = 1$ , se puede escribir la siguiente expresión:

$$\eta = 2 - \frac{w_{m\acute{a}x}}{w_{ref}} = 2 - \frac{\phi(x, y) \cdot q(t_{m\acute{a}x})}{\phi(x, y) \cdot q(t_{\infty})} = 2 - \frac{q(t_{m\acute{a}x})}{q(t_{\infty})} = CTE$$

Ésta conclusión sólo es aplicable para casos  $N = 1$  dónde  $\eta = cte$  para todos los puntos de la placa, además como se ha explicado con anterioridad el tiempo de cálculo es mucho menor, sin dejar de lado la precisión de cálculo.

### 6.2.2.3.- Justificación de la posición de la placa a analizar

Para el análisis de la placa en este apartado, se procederá a especificar 9 puntos a estudiar, las cuales se especifican en la figura 6.5.



*Fig. 6.5 Puntos de análisis en la placa.*

El objetivo de evaluar la flecha en diferentes puntos de la placa, es poder compararlos entre ellos, para demostrar teóricamente que es innecesario evaluar todos los puntos de la placa cada vez que se varíen los parámetros que intervienen en la ecuación de equilibrio, ya que la posición central de la placa es el que mayor desplazamiento tiene, por lo tanto será el que mayor información nos dé con respecto a las demás posiciones.

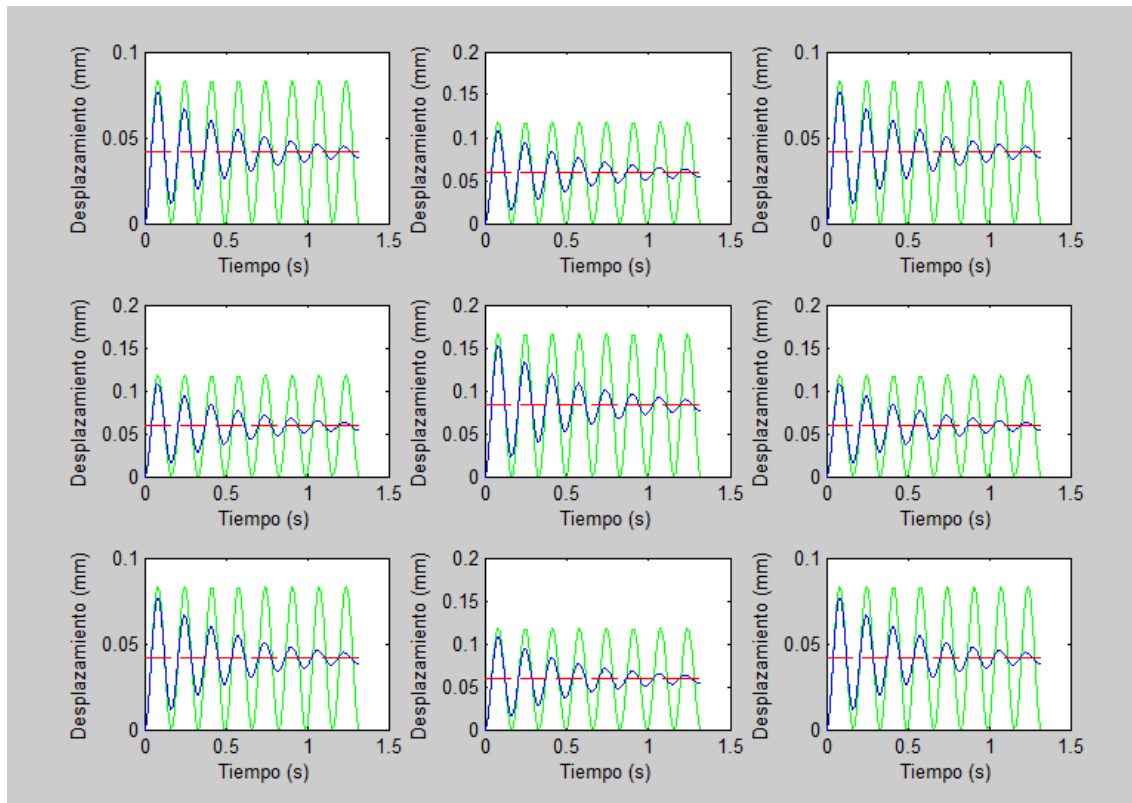


Fig. 6.6 Desplazamiento en los 9 puntos definidos.

A continuación se especificará los desplazamientos máximos en cada uno de los puntos elegidos de la placa:

Caso no amortiguado	Caso amortiguado
$w_1^*(0.5,0.5,t) = 0,08306665 \text{ mm}$	$w_1(0.5,0.5,t) = 0,07666719 \text{ mm}$
$w_2^*(1,0,5,t) = 0,117474 \text{ mm}$	$w_2(1,0,5,t) = 0,1084238 \text{ mm}$
$w_3^*(1.5,0.5,t) = 0,08306665 \text{ mm}$	$w_3(1.5,0.5,t) = 0,07666719 \text{ mm}$
$w_4^*(0.5,1,t) = 0,117474 \text{ mm}$	$w_4(0.5,1,t) = 0,1084238 \text{ mm}$
<b><math>w_5^*(1,1,t) = 0,1661333 \text{ mm}</math></b>	<b><math>w_5(1,1,t) = 0,1533344 \text{ mm}</math></b>
$w_6^*(1.5,1,t) = 0,117474 \text{ mm}$	$w_6(1.5,1,t) = 0,1084238 \text{ mm}$
$w_7^*(0.5,1.5,t) = 0,08306665 \text{ mm}$	$w_7(0.5,1.5,t) = 0,07666719 \text{ mm}$
$w_8^*(1,1.5,t) = 0,117474 \text{ mm}$	$w_8(1,1.5,t) = 0,1084238 \text{ mm}$
$w_9^*(1.5,1.5,t) = 0,08306665 \text{ mm}$	$w_9(1.5,1.5,t) = 0,07666719 \text{ mm}$

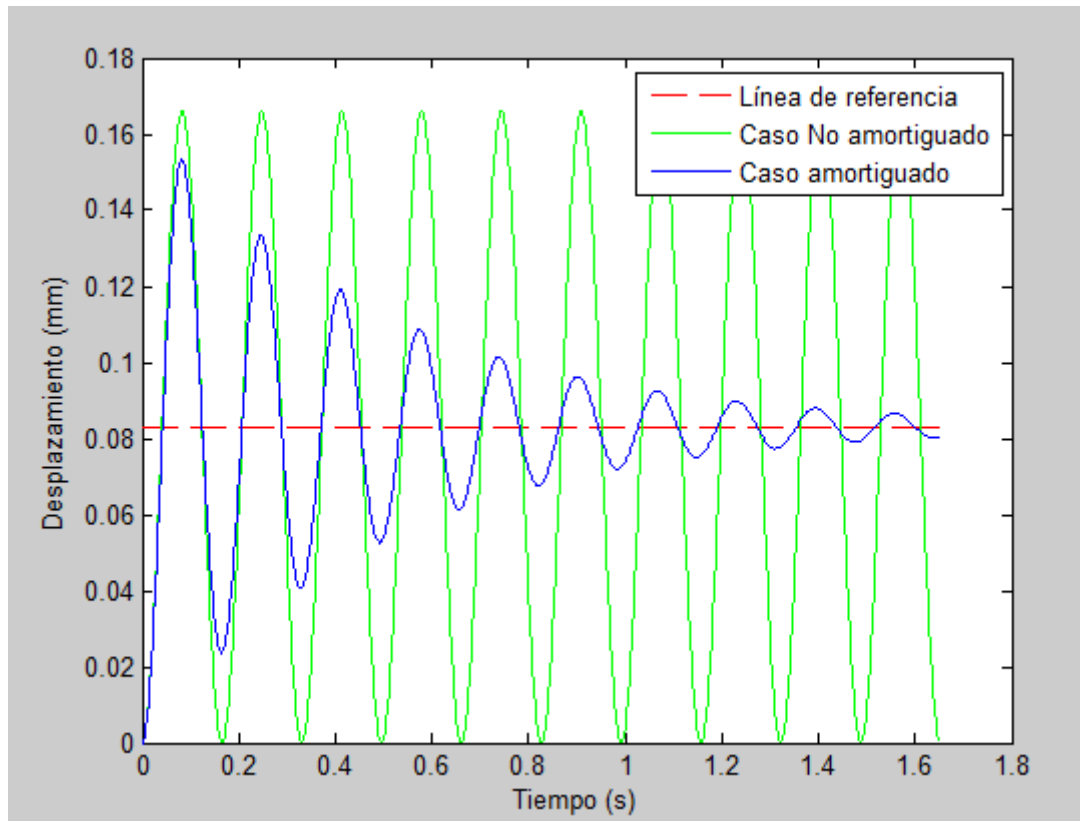
Tabla 6.2. Comparación del desplazamiento en los 9 puntos establecidos.

Finalmente al tener los nueve puntos, en la tabla 6.2, se puede observar que el desplazamiento mayor ocurre en el centro de la placa, por lo tanto, queda justificado que no es necesario, evaluar todos los puntos de la placa, ya que el punto central es el que mayor desplazamiento sufre.

### 6.2.3.- Análisis en el centro de la placa

Después de haber hecho algunos análisis con sus respectivas conclusiones, se procede a realizar otro en el centro de la placa, sin olvidar los parámetros iniciales tanto de la placa, como del elemento amortiguador.

En este análisis se presentan los casos de Amortiguamiento y No Amortiguamiento, para que se pueda ver de forma clara la capacidad de amortiguamiento.



*Fig. 6.7 Comparación del caso amortiguado y el no amortiguado.*

Desplazamiento máximo para el caso **No Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x}^* = 0,1661595 \text{ mm}$$

Desplazamiento máximo para el caso **Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x} = 0,1533181 \text{ mm}$$

Capacidad de Amortiguamiento:

$$\eta \equiv \left(2 - \frac{w_{m\acute{a}x}}{w_{ref}}\right) \times 100 = 2 - \frac{0,1533181}{0,08307976} = \mathbf{15,46\ \%}$$

Estos resultado nos indican que la placa ha sido amortiguada en un 15,46 %, el cual se ve justificada en la figura 6.7, d3nde el desplazamiento en el centro de la placa amortiguada es menor con respecto al no amortiguado.

Sin embargo como es evidente la capacidad de amortiguamiento puede variar, esto se puede conseguir modificando los par3metros iniciales, tanto de la placa como del material viscoel3stico. Es por ello que en el siguiente apartado se iniciar3n a variar estos par3metros, adem3s se ver3n los efectos que ocasionan sobre la placa, as3 mismo se compararán con el caso de los par3metros iniciales.

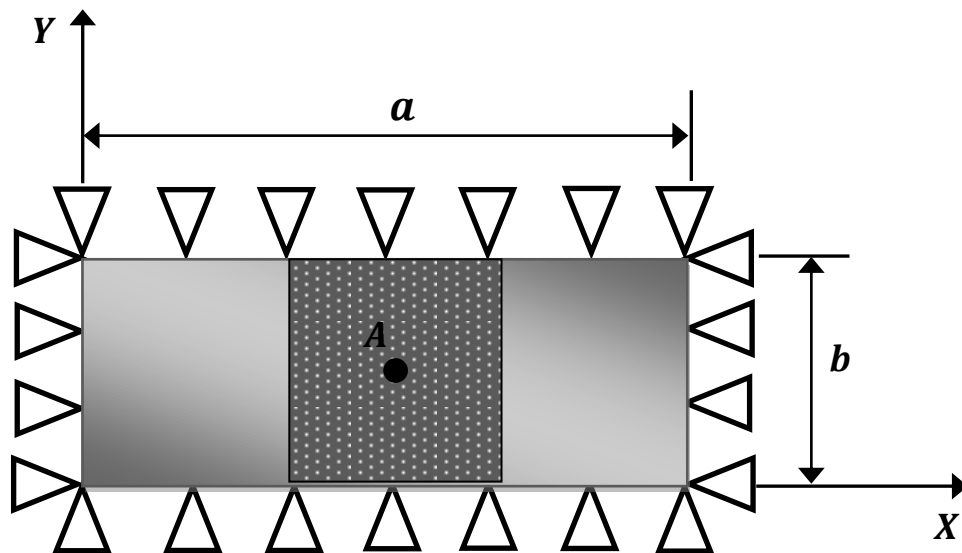
#### 6.2.4.- Variaciones de los valores geométricos de la placa para $N = 1$

Como se ha justificado en el apartado anterior, en el que se ha comprobado, que el mayor desplazamiento se desarrolla en el centro de la placa, para reducir la cantidad de resultados, todos los estudios que se van a realizar en adelante, también se elegirá como posición el centro de la misma (explicado en el apartado anterior), para que de este modo sea más práctico a la hora de comparar los resultados.

##### 6.2.4.1.- Cambio en el largo de la placa

En este caso, se mantendrá el ancho de la placa, mientras que se variará el largo de la placa, como se observa en la figura 6.8.

$$a = 4 \text{ m}$$



*Fig. 6.8 Placa empotrada, largo menor que ancho*

En la figura 6.8 también se puede observar la posición ( $A$ ), que es en dónde se realiza el estudio del desplazamiento de la placa. El cual resultará más cómodo y efectivo a la hora de realizar y comparar los cálculos.

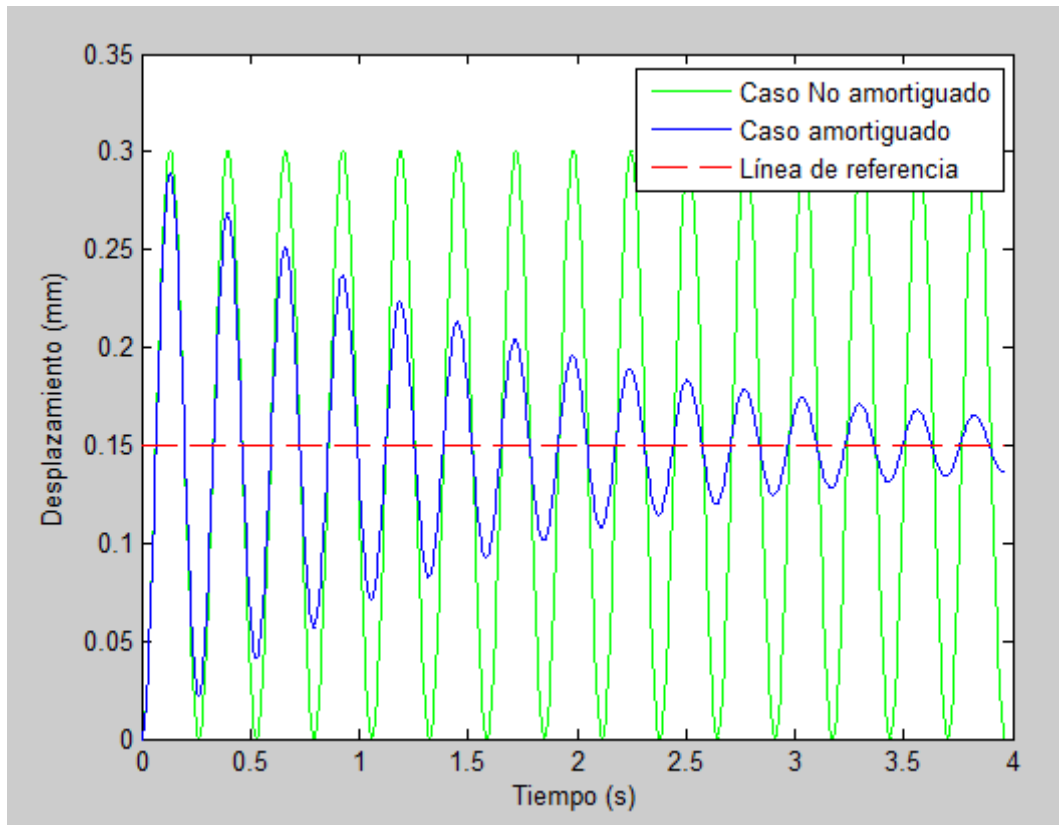


Fig. 6.9 Desplazamiento en el centro de la placa.

Desplazamiento máximo para el caso **No Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x}^* = 0,3007809 \text{ mm}$$

Desplazamiento máximo para el caso **Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x} = 0,2892402 \text{ mm}$$

Capacidad de Amortiguamiento:

$$\eta \equiv \left( 2 - \frac{w_{m\acute{a}x}}{w_{ref}} \right) \times 100 = 2 - \frac{0,2892402}{0,15039045} = 7.67 \%$$

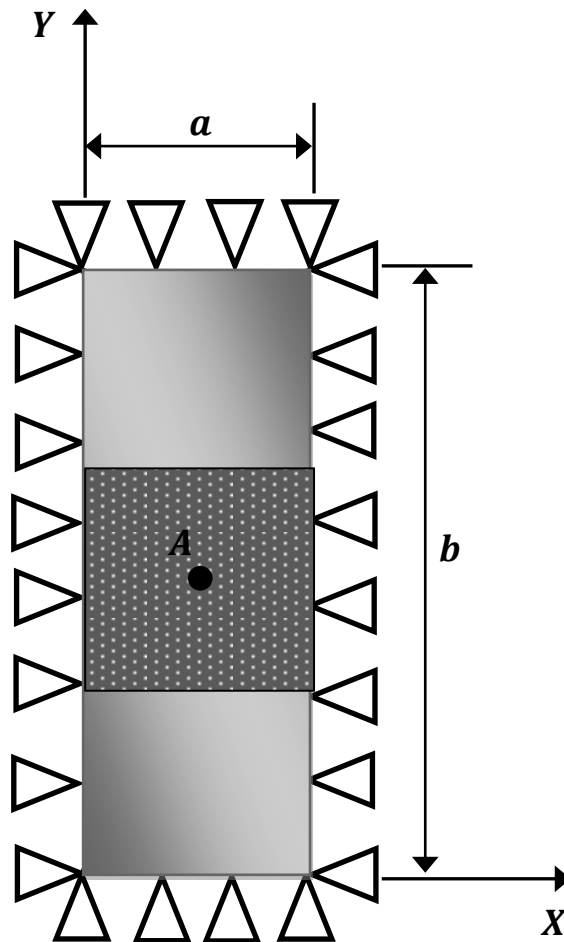
Como se puede observar, la capacidad de amortiguamiento es baja, esto se debe principalmente a que la superficie de la placa ha aumentado considerablemente respecto a elemento amortiguador, creando éste un efecto menor sobre la placa a amortiguar.



#### 6.2.4.2.- Cambio en el ancho de la placa

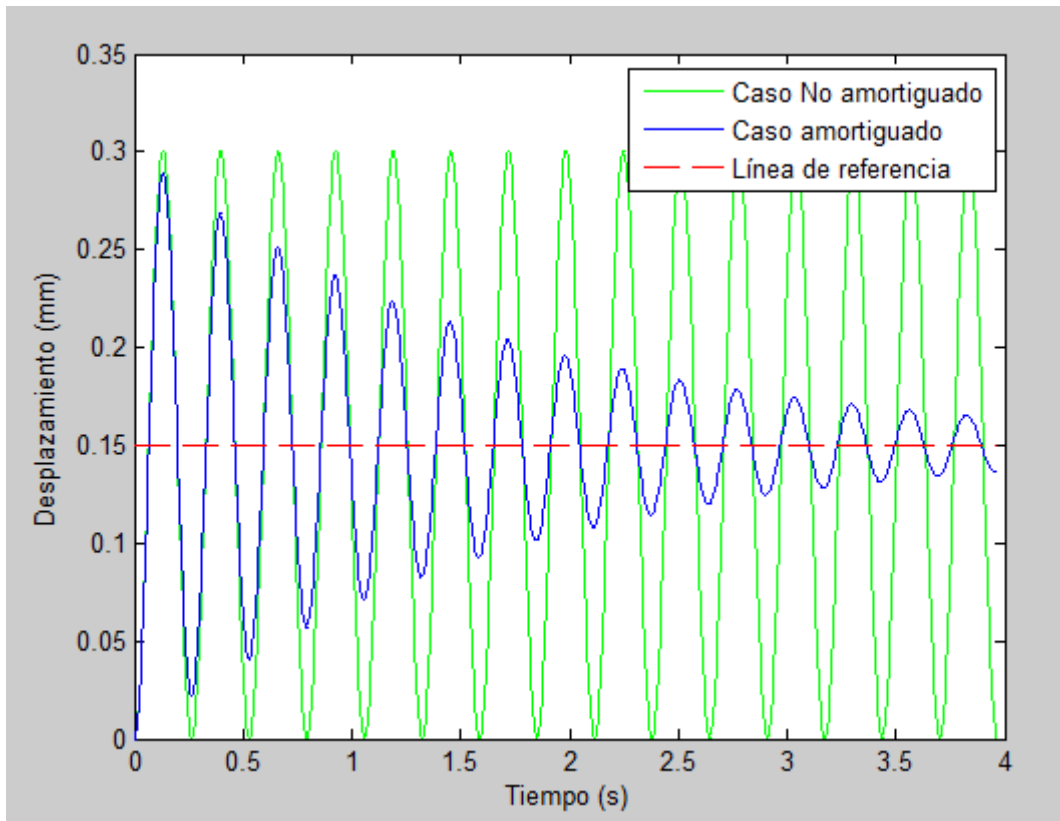
En este caso, se ha mantenido constante el largo de la placa y se ha modificado el ancho de la placa, como se puede observar en la figura 6.10.

$$b = 4 \text{ m}$$



*Fig. 6.10 Placa empotrada, ancho mayor que largo*

En la figura se ve claramente el cambio en la geometría de la placa, dónde el ancho es de 4 m.



*Fig.6.11 Desplazamiento en el centro de la placa.*

Desplazamiento máximo para el caso **No Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x}^* = 0,3007809 \text{ mm}$$

Desplazamiento máximo para el caso **Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x} = 0,2892494 \text{ mm}$$

Capacidad de Amortiguamiento:

$$\eta \equiv \left( 2 - \frac{w_{m\acute{a}x}}{w_{ref}} \right) \times 100 = 2 - \frac{0,2892494}{0,1503904} = 7,67 \%$$

Como era de esperar, el resultado es el mismo al apartado anterior, esto se debe a que la geometría se ha mantenido respecto a la placa del anterior caso, esto no afecta en el resultado de amortiguamiento, por ello se obtiene la misma capacidad.

#### 6.2.4.3.- Cambio en el espesor de la placa

Como se puede observar en la figura 6.12, para este caso se ha procedido a disminuir el espesor de la placa a la mitad, pero manteniendo el ancho y largo de la placa con las medidas iniciales, es decir:

$$h = 0,0025 \text{ m}$$

$$a = b = 2 \text{ m}$$

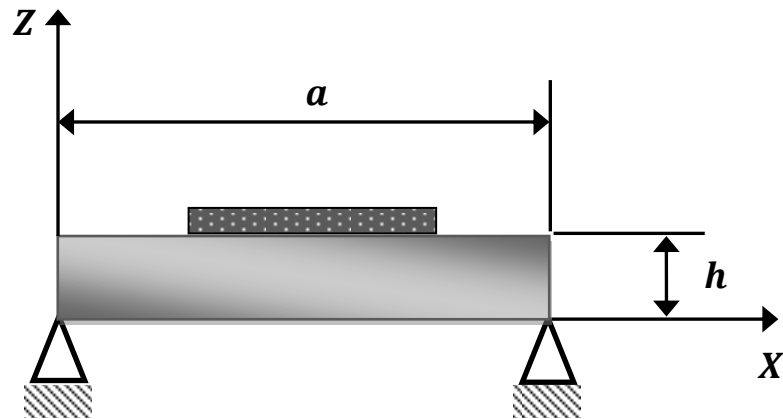


Fig. 6.12 Placa empotrada, ancho mayor que largo

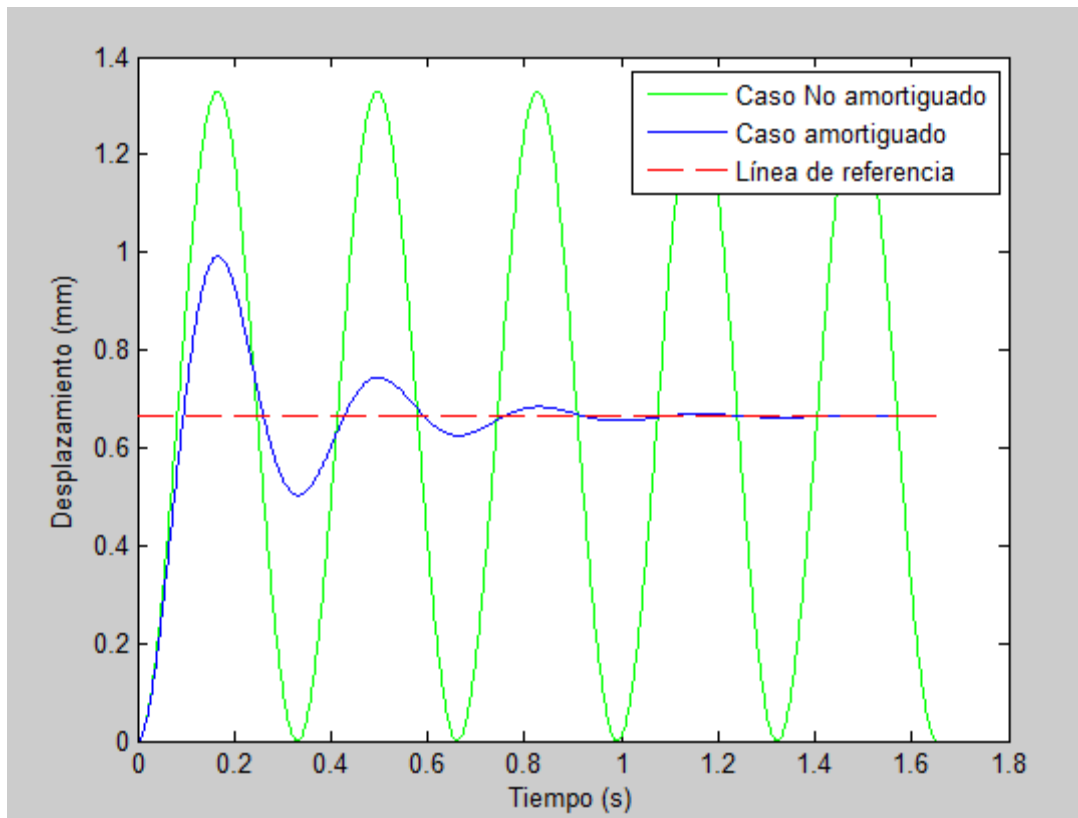


Fig. 6.13 Desplazamiento con cambio de espesor de la placa.

Desplazamiento máximo para el caso **No Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x}^* = 1,329276 \text{ mm}$$

Desplazamiento máximo para el caso **Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x} = 0,9922556 \text{ mm}$$

En los resultados se puede apreciar que, al disminuir el espesor de la placa, éste influye enormemente en el desplazamiento del mismo, es decir que la placa sufre una mayor oscilación, por tanto el material amortiguador actúa con mayor eficacia.

Capacidad de Amortiguamiento:

$$\eta \equiv \left( 2 - \frac{w_{m\acute{a}x}}{w_{ref}} \right) \times 100 = 2 - \frac{0,9922556}{0,6646382} = \mathbf{50,71 \%}$$

Además, se puede observar claramente dos cosas, la primera el gran incremento que se observa del desplazamiento con respecto a los casos anteriores, siendo la causa evidente la disminución del espesor; y en segundo lugar la capacidad de amortiguamiento también es mucho mayor, ello se debe que a mayores desplazamientos, el material amortiguador tendrá mayores efectos sobre los desplazamientos de los mismos.

### 6.2.5.- Cambios en el material base de la placa para $N = 1$

Para los siguientes casos se va a mantener las características geométricas iniciales de la placa, por lo tanto el ancho ( $b$ ) y el largo ( $a$ ) de la placa valdrán  $2\text{ m}$ , mientras que el espesor ( $h$ ),  $5\text{ mm}$ .

#### 6.2.5.1.- Cambio en la densidad de la placa

Como se había explicado al principio de los análisis, en primer lugar se iban a modificar los valores de la geometría de la placa, ahora, en esta parte del análisis se va a mantener aquellos valores iniciales de la geometría de la placa para proceder a variar el material base del amortiguador, y como primer caso se ha elegido la densidad.

$$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$$

$$E = 70 \text{ GPa}$$

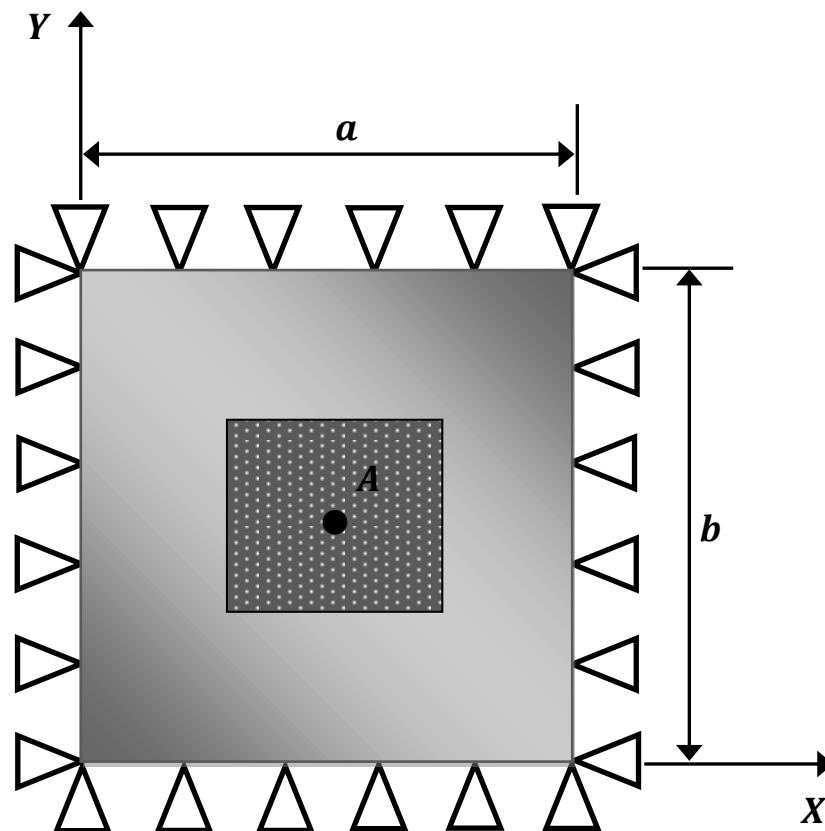


Fig. 6.14 Dimensiones de la placa.

En la figura 6.14 se puede observar la geometría inicial, el cual se utilizará para los posteriores casos.

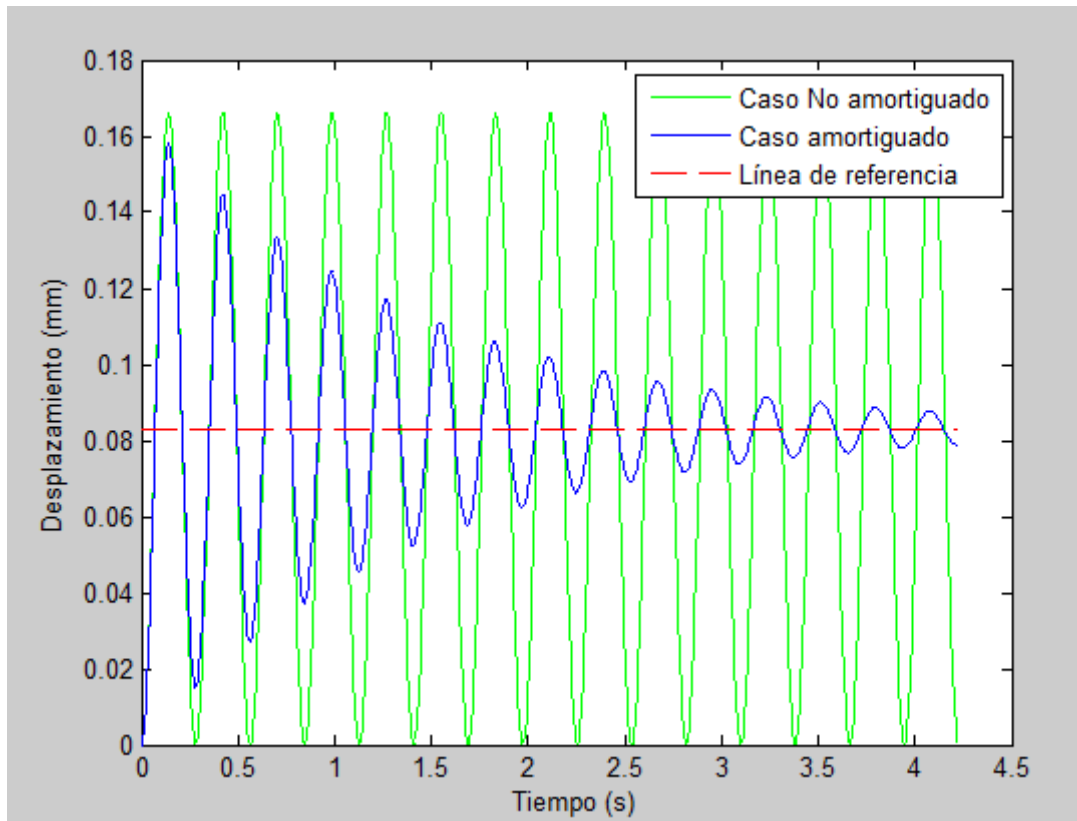


Fig. 6.15 Desplazamiento con cambio de densidad.

Desplazamiento máximo para el caso **No Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x}^* = 0,1661595 \text{ mm}$$

Desplazamiento máximo para el caso **Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x} = 0,1582992 \text{ mm}$$

Capacidad de Amortiguamiento:

$$\eta \equiv \left( 2 - \frac{w_{m\acute{a}x}}{w_{ref}} \right) \times 100 = 2 - \frac{0,1582992}{0,08307975} = 9,46 \%$$

Comparación entre los casos amortiguados:

Casos	$(\rho = 2700 \text{ kg/m}^3)$	$(\rho = 7850 \text{ kg/m}^3)$
$w_{m\acute{a}x}$	0,1533181 mm	0,1582992 mm
$\eta$	<b>15,46 %</b>	<b>9,46 %</b>

*Tabla 6.3. Comparación variando la densidad de la placa.*

En la tabla 6.3 se puede observar que en el segundo caso la flecha es mayor que la primera, esto se debe a que, al elevar el valor de la densidad, afecta directamente a la inercia de la placa, por lo tanto al haber mayor inercia, mayor será el desplazamiento debido a ello.

Por otro lado la capacidad de amortiguamiento es menor, esto se debe a que al aumentar la densidad de la placa, le costará más al elemento viscoelástico lograr su cometido, disminuyendo la capacidad de amortiguamiento.

### 6.2.5.2- Cambio en el módulo de elasticidad de la placa

Mientras que para este caso, se mantiene la densidad inicial y se cambia el módulo de Young.

$$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

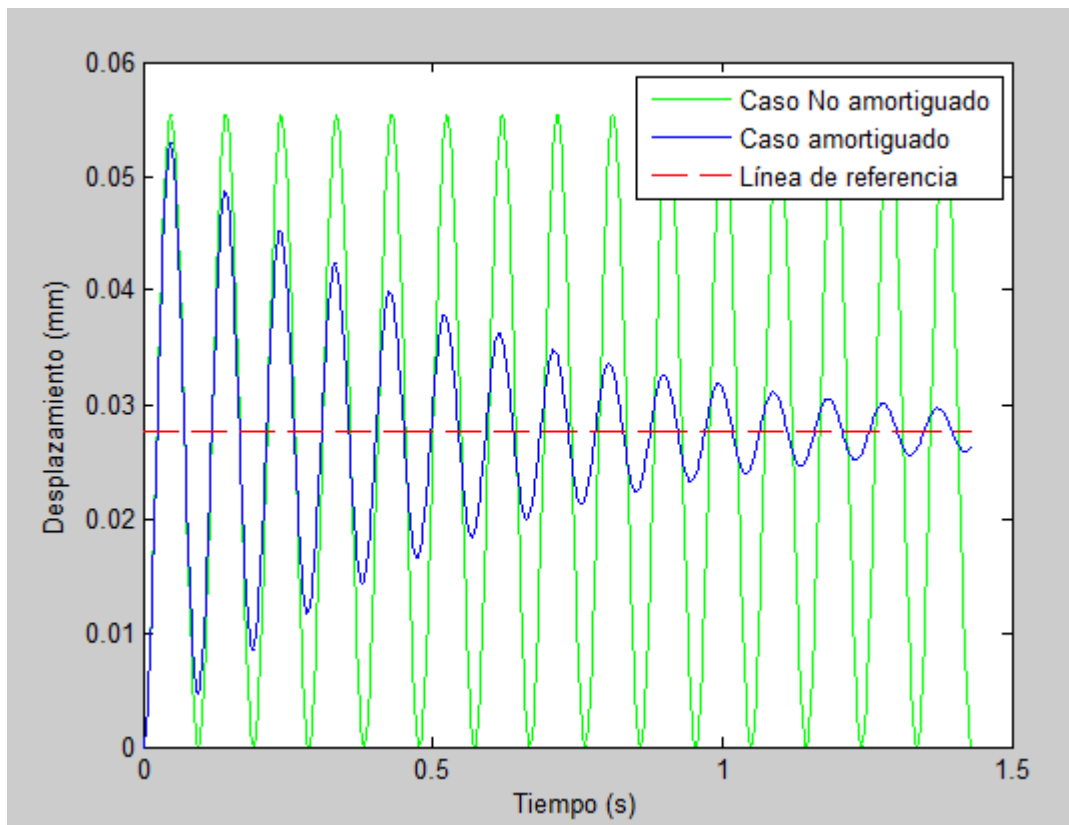


Fig. 6.16 Desplazamiento para el caso de un módulo de elasticidad diferente.

Desplazamiento máximo para el caso **No Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x}^* = 0,05538651 \text{ mm}$$

Desplazamiento máximo para el caso **Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x} = 0,05294105 \text{ mm}$$



Capacidad de Amortiguamiento:

$$\eta \equiv \left( 2 - \frac{w_{m\acute{a}x}}{w_{ref}} \right) \times 100 = 2 - \frac{0,05294105}{0,02769325} = \mathbf{8.83 \%}$$

Comparación entre los casos amortiguados:

Casos	( $E = 70 \text{ GPa}$ )	( $E = 210 \text{ GPa}$ )
$w_{m\acute{a}x}$	0,1533181 mm	0,05294105 mm
$\eta$	<b>15,46 %</b>	<b>8,83 %</b>

*Tabla 6.4. Comparación variando el Módulo de Young de la placa.*

Se ve en la tabla 6.4 que, el desplazamiento del segundo caso es menor que el primero, esto se debe a que el Módulo Young afecta directamente a la rigidez de la placa, por lo tanto la rigidez se interpone en su desplazamiento, haciendo que la placa vibre menos.

Por otro lado la capacidad de amortiguamiento del segundo caso también es menor, siendo la causa la misma explicada anteriormente, ya que la rigidez contrarresta el efecto del material amortiguador, por lo tanto a mayor Módulo de Young, menor será el efecto del material amortiguador.

### 6.2.5.3.- Cambio en el módulo de elasticidad y la densidad de la placa

Para este caso, se ha procedido a cambiar ambos parámetros de la base del material, pero manteniendo los valores de la geometría, como se puede observar en la figura 6.16, así poder realizar una comparación a posteriori de las flechas.

$$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

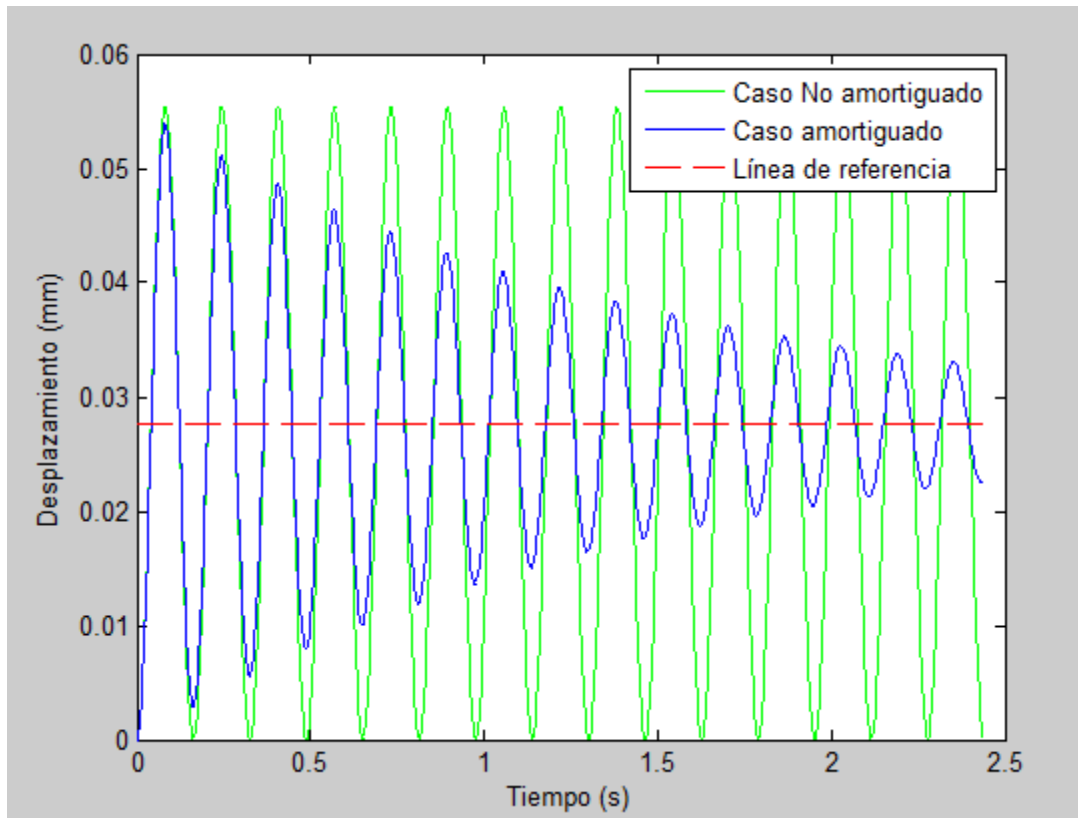


Fig. 6.17 Desplazamiento, con el cambio a la densidad y módulo de Young de la placa.

Desplazamiento máximo para el caso **No Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x}^* = 0,0553865 \text{ mm}$$

Desplazamiento máximo para el caso **Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x} = 0,05386237 \text{ mm}$$

Capacidad de Amortiguamiento:

$$\eta \equiv \left( 2 - \frac{w_{m\acute{a}x}}{w_{ref}} \right) \times 100 = 2 - \frac{0,05386237}{0,02769325} = 5,5 \%$$

Comparación entre los casos amortiguados:

Casos	$\rho = 2700 \text{ } kg/m^3$	$\rho = 7850 \text{ } kg/m^3$
	$E = 70 \text{ } GPa$	$E = 210 \text{ } GPa$
$w_{m\acute{a}x}$	0,1533181 mm	0,05386237 mm
$\eta$	<b>15,46 %</b>	<b>5,5 %</b>

*Tabla 6.5. Comparación variando la densidad y el Módulo de Young de la placa.*

Respecto al desplazamiento, en la tabla 6.5 se observa que, el segundo caso es menor que el primero. Sin embargo se mencionó en los análisis anteriores, que, al aumentar la densidad entonces aumenta el desplazamiento, pero en este análisis no es así, esto se debe al efecto ocasionado por el Módulo Young es mayor. Por lo tanto el módulo de Young tiene un mayor efecto en el desplazamiento de la placa, así como en su capacidad.

Por otro lado la capacidad de amortiguamiento tiene las mismas conclusiones mencionadas anteriormente, es decir que al aumentar el módulo de Young, la capacidad de amortiguamiento es mucho menor.

### 6.2.6.- Cambios en las características del material amortiguador

Para este caso el parámetro a cambiar son las características del elemento amortiguador.

#### 6.2.6.1.- Cambio en el coeficiente de amortiguamiento $H_0$ y su influencia en la capacidad de amortiguamiento $\eta$

Mientras que en este caso el parámetro a cambiar es el valor del coeficiente de amortiguador, para el que se ha decidido darle el doble del valor que originalmente tenía. Sin embargo se va a mantener los valores originales del material base y de la geometría, para así, realizar comparaciones a posteriori.

$$H_0 = 280 \text{ kg/m.s}$$

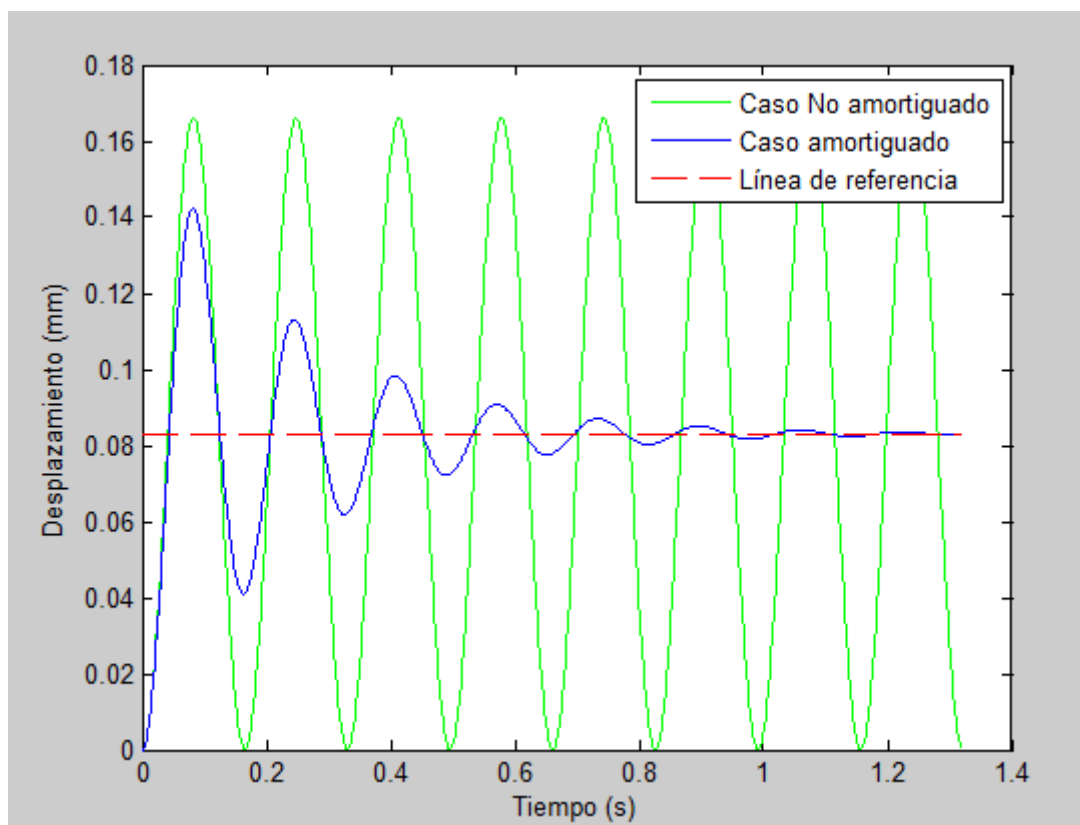


Fig. 6.18 Desplazamiento con diferente coeficiente de amortiguamiento.

Desplazamiento máximo para el caso **No Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x}^* = 0,1661595 \text{ mm}$$

Desplazamiento máximo para el caso **Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x} = 0,1422232 \text{ mm}$$

Capacidad de Amortiguamiento:

$$\eta \equiv \left( 2 - \frac{w_{m\acute{a}x}}{w_{ref}} \right) \times 100 = 2 - \frac{0,1422232}{0,08307976} = \mathbf{28,81 \%}$$

Comparación entre los casos amortiguados:

Casos	$H_0 = 140 \text{ N.s/m}$	$H_0 = 280 \text{ N.s/m}$
$w_{m\acute{a}x}$	0,1533181 mm	0,1422232 mm
$\eta$	<b>15,46 %</b>	<b>28,81 %</b>

*Tabla 6.6. Comparación variando el coeficiente de amortiguamiento.*

Para este caso en particular, es altamente razonable pensar que un mayor valor de  $H_0$  amortiguará una mayor cantidad, debido a que el término de amortiguamiento de la ecuación de movimiento de la placa es proporcional a este parámetro. Como se puede comprobar en la tabla 6.6, el desplazamiento del segundo caso es un poco menor que el primero (caso estándar), y aunque sea un poco menor, esto implicaría que la placa estaría menos solicitada, con lo cual su vida sería mayor. Mientras que la capacidad de amortiguamiento del segundo caso, casi se ha duplicado.

Por lo tanto, sabiendo que al aumentar  $H_0$  aumenta la capacidad de amortiguamiento, se ha procedido a calcular la capacidad de amortiguación  $\eta(\%)$  en función de  $H_0$ , como se observa en la figura 6.19, en dónde se comprueba que la capacidad de amortiguamiento llega a alcanzar el 100% para valores cercanos a  $H_0 = 1800 \text{ N.s/m}$ .

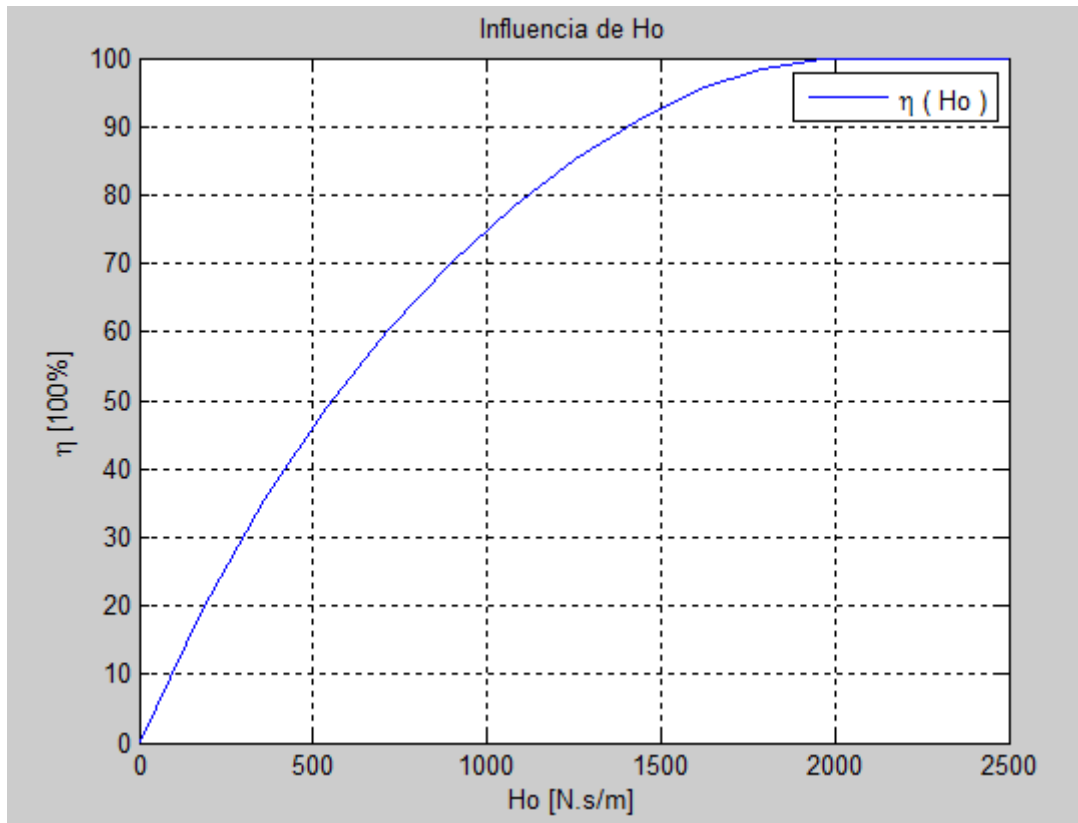
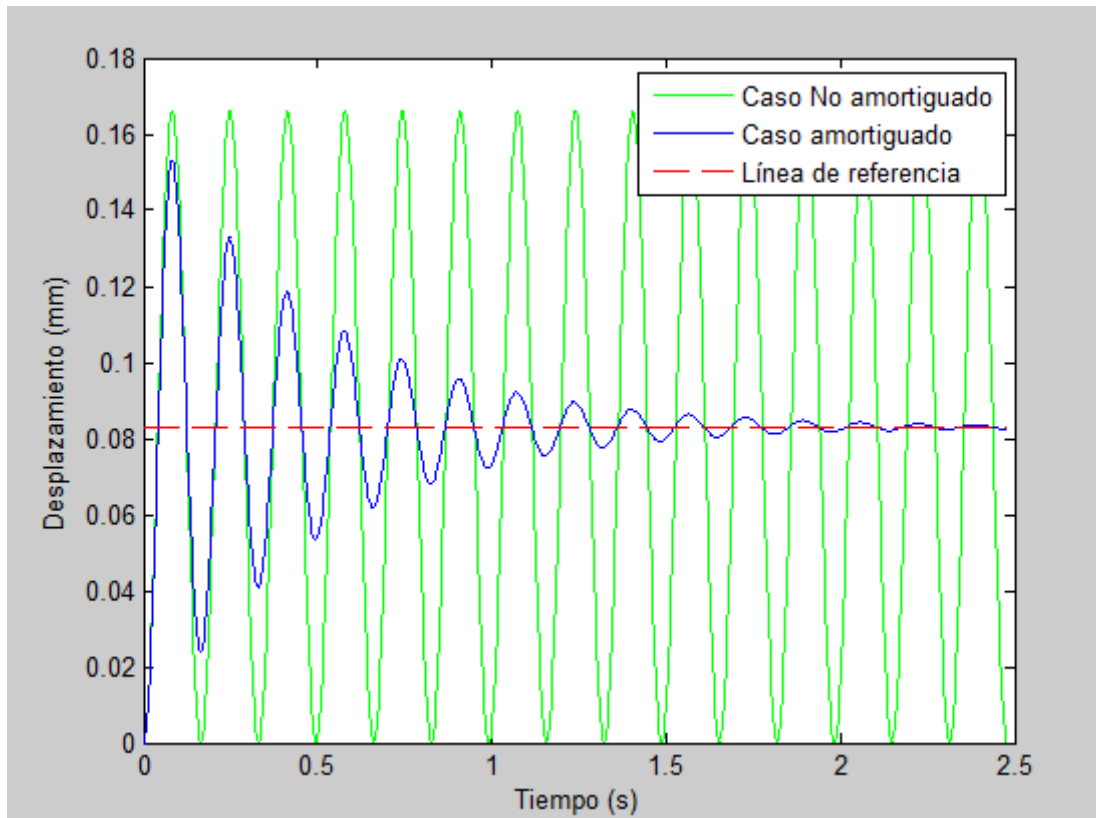


Fig. 6.19 Capacidad de amortiguamiento  $\eta$  en función de  $H_0$

### 6.2.6.2.- Cambio en el coeficiente de relajación $\mu$ y su influencia en la capacidad de amortiguamiento $\eta$

Por otro lado, para el caso del parámetro de relajación se ha decidido darle el doble del valor que originalmente tenía. Sin embargo se va a mantener los valores originales del material base y de la geometría, para así, realizar posteriores comparaciones.

$$\mu = 440 \text{ s}^{-1}$$



*Fig. 6.20 Desplazamiento con diferente coeficiente de viscoelástico.*

Como se puede apreciar en la figura 6.20, se ha obtenido el desplazamiento en el centro de la placa, con un  $\mu$  diferente, sin embargo a la hora de compararlo con el caso original, tanto la variación del desplazamiento como de la capacidad de amortiguamiento es mínima. Por lo tanto se podría concluir que es un parámetro que casi no influye en los resultados, como se observa en la tabla 7.

Desplazamiento máximo para el caso **No Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x}^* = 0,1661595 \text{ mm}$$

Desplazamiento máximo para el caso **Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x} = 0,1531354 \text{ mm}$$

Capacidad de Amortiguamiento:

$$\eta \equiv \left( 2 - \frac{w_{m\acute{a}x}}{w_{ref}} \right) \times 100 = 2 - \frac{0,1531354}{0,08307976} = \mathbf{15,68 \%}$$

Comparación entre los casos amortiguados:

Casos	$(\mu = 220s^{-1})$	$(\mu = 440 s^{-1})$
$w_{m\acute{a}x}$	0,1533181 mm	0,1531354 mm
$\eta$	<b>15,46 %</b>	<b>15,68 %</b>

*Tabla 6.7. Comparación variando el parámetro de la relajación.*

En la tabla 6.7, la comparación indica que la capacidad de amortiguamiento aumenta, pero un porcentaje, que al parecer es despreciable.

Como no se quiere dar una conclusión errónea, se procede a realizar una comparación de la capacidad de amortiguamiento en función del parámetro de relajación, ya que al observar la ecuación de movimiento de la placa, resulta complicado poder estimar la influencia de este parámetro  $\mu$  de la función de relajación al obtener la solución final del problema. Por lo tanto, si se pretende obtener una mayor información de la influencia de este parámetro en la capacidad de amortiguamiento, la figura 6.20 no será suficiente.

Como se ha mencionado anteriormente se ha procedido a resolver el problema manteniendo los valores originales del problema, para expresar la capacidad de amortiguamiento en función del parámetro  $\mu$ , obteniendo la figura 6.21.



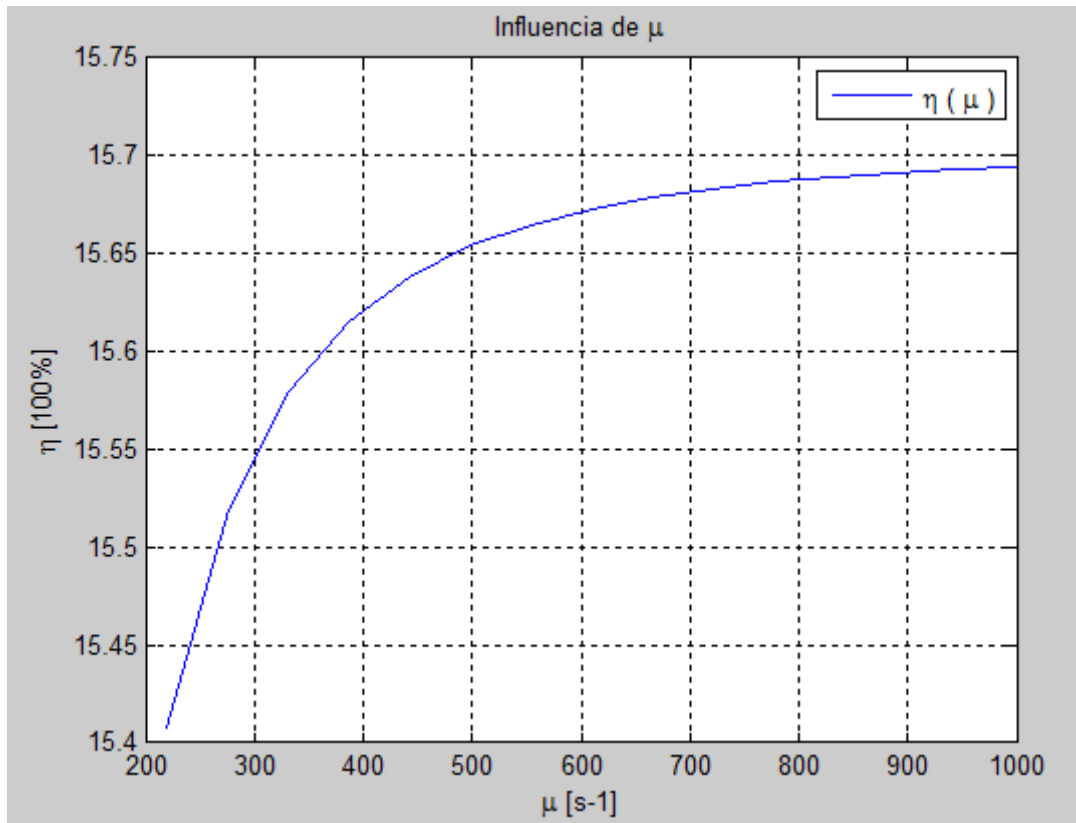


Fig. 6.21 Capacidad de amortiguamiento  $\eta$  en función de  $\mu$

Finalmente, como se puede observar en la figura 6.21, teniendo el resto de parámetros con valores originales, se ve claramente que la placa sufre una mayor amortiguación a medida que aumenta  $\mu$ , es decir cuando el material amortiguador se va haciendo más viscoso.

Para el caso de un material perfectamente viscoso ( $\mu \rightarrow \infty$ ), la amortiguación alcanza su valor máximo en torno al 15,7 %. Por lo tanto la existencia de esta cota superior indica que por medio de este parámetro no se puede aumentar el amortiguamiento hasta cualquier valor deseado, sino hasta un máximo que es 15,7 % aproximadamente.

También se concluye a partir de la figura 6.21, que para  $\mu \cong 900$  se producen aumentos muy pequeños de la capacidad de amortiguación para grandes variaciones de  $\mu$ , este comportamiento no puede interesar si el coste de aumentar  $\mu$  no es compensado.

### 6.2.6.3.- Cambio del parámetro $\alpha$ y su influencia en la capacidad de amortiguamiento $\eta$

En este apartado, al igual que los anteriores se ha mantenido los valores iniciales del problema, variando solo el parámetro  $\alpha$  y así conseguir resultados que reflejen la influencia directa de este parámetro.

$$\alpha = 25 \text{ m}^{-1}$$

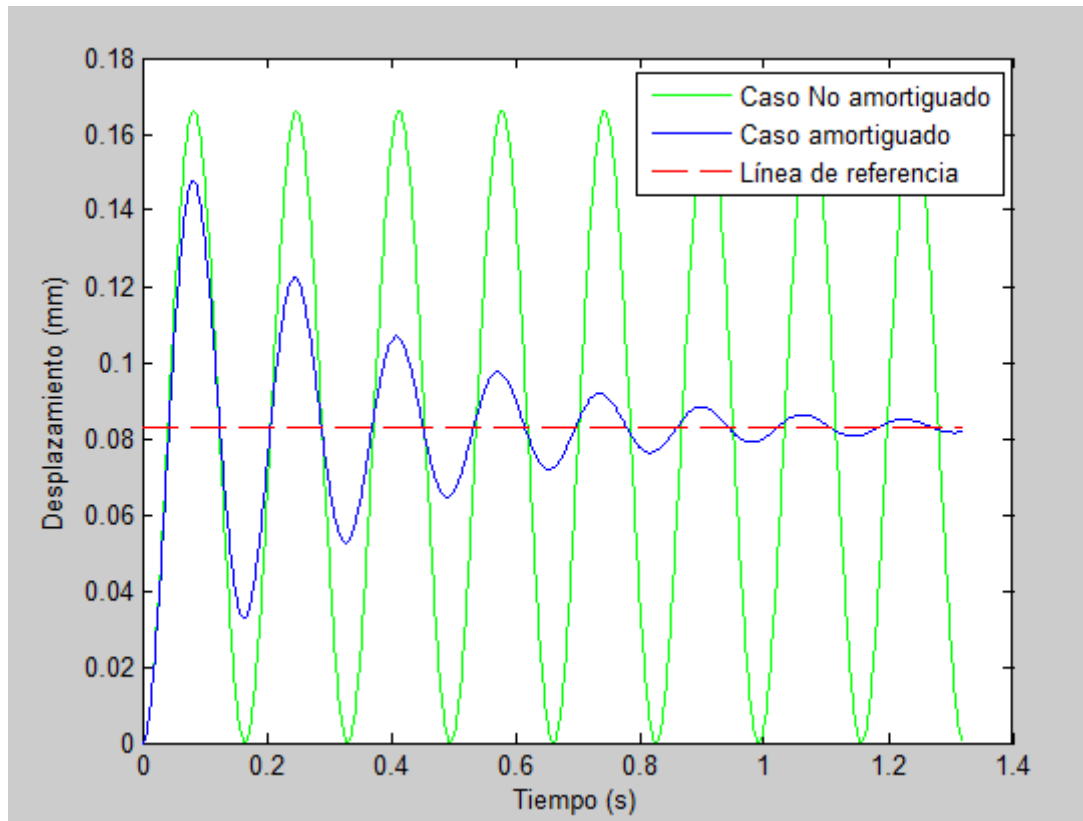


Fig. 6.22 Desplazamiento con diferente parámetro  $\alpha$ .

En la figura 6.22 se muestran los desplazamientos en  $x = a/2$ ,  $y = b/2$  para un valor de  $\alpha$  diferente al del caso original, sin embargo se ha mantenido el resto de valores, y como se observa en tal figura, este parámetro tiene una influencia en la capacidad de amortiguamiento, el cual se especifica en la tabla 8.

Desplazamiento máximo para el caso **No Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x}^* = 0,1661333mm$$

Desplazamiento máximo para el caso **Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x} = 0,1477147 \text{ mm}$$

Capacidad de Amortiguamiento:

$$\eta \equiv \left( 2 - \frac{w_{m\acute{a}x}}{w_{ref}} \right) \times 100 = 2 - \frac{0,1477147}{0,08306665} = \mathbf{22,17 \%}$$

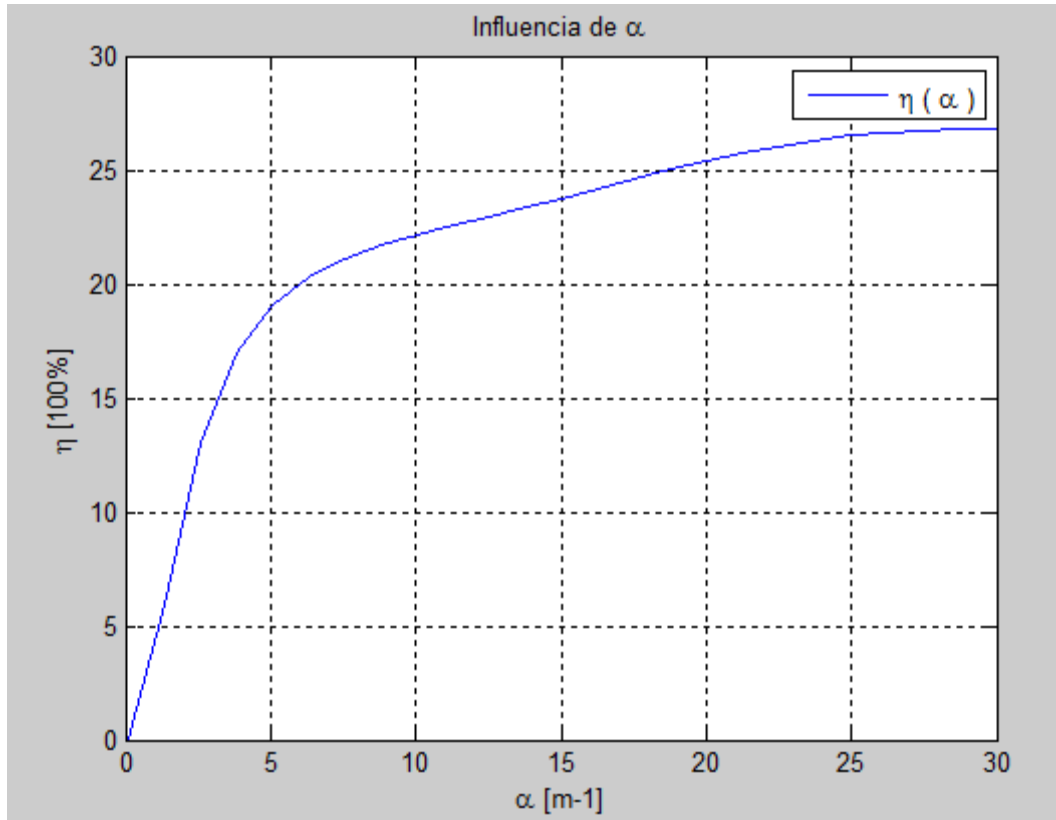
Comparación entre los casos amortiguados:

Casos \ $\alpha$	$\alpha = 5 \text{ m}^{-1}$	$\alpha = 25 \text{ m}^{-1}$
$w_{m\acute{a}x}$	0,1533181 mm	0,1477147 mm
$\eta$	<b>15,46 %</b>	<b>22,17 %</b>

*Tabla 6.8. Comparación variando el parámetro de la función de amortiguamiento.*

Como se puede observar claramente en la tabla 6.8, al aumentar el parámetro  $\alpha$  aumenta la capacidad de amortiguamiento. Además el desplazamiento es menor, este es un buen dato, porque significa que al ser desplazado en menor proporción la placa implica un menor sufrimiento.

Es por ello que se ha decidido obtener como es la influencia de este parámetro en la capacidad de amortiguamiento.



*Fig. 6.23 Capacidad de amortiguamiento  $\eta$  en función de  $\alpha$*

Como se observa en la figura 6.23, dónde se representa la capacidad de amortiguamiento en función del parámetro  $\alpha$ , se concluye que la máxima capacidad de amortiguamiento se alcanza en entorno a  $\eta = 27 \%$ , con lo cual, variando el parámetro  $\alpha$ , el máximo valor que se puede obtener para  $\eta$  es 27 %.

Por otro lado se está teniendo en cuenta que este parámetro  $\alpha$  representa un material viscoelástico no local (el caso de este análisis), sin embargo si se pretendiese llevar este elemento amortiguador al caso local ( $\alpha \rightarrow \infty$ ), que sería a partir de  $\alpha \cong 30$ , como se observa en la figura 6.23, los incrementos de  $\eta$  no son muy significativos, ya que la pendiente de la curva se hace prácticamente nula.

Finalmente se puede concluir que si optamos por elementos con  $\alpha > 30$ , la capacidad de amortiguamiento no presentaría ningún cambio.

### 6.3.- Caso2: Condiciones de contorno - Empotrada en el contorno

Como segundo caso a analizar, una placa empotrada en sus cuatro lados, el cual se mantendrá los valores iniciales del problema, ya que estos fueron los utilizados para el caso de la placa apoyada.

#### 6.3.1.- Modos Propios no amortiguados

De igual forma que el primer caso, primero vamos a determinar los modos propios no amortiguados del problema, es decir vamos a obtener el conjunto de funciones  $\{\phi_{m,n}\}_{m=1,n=1}^{\infty}$ , que para resolver este caso, se parte de la expresión general de los modos propios:

$$\phi_{m,n}(x, y) = \psi_m(x) \cdot \varphi_n(y)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_m(x) = A_1 \cdot \cos(k_n x) + A_2 \cdot \sin(k_n x) + A_3 \cdot \cosh(k_n x) + A_4 \cdot \sinh(k_n x) \\ \varphi_n(y) = B_1 \cdot \cos(c_m y) + B_2 \cdot \sin(c_m y) + B_3 \cdot \cosh(c_m y) + B_4 \cdot \sinh(c_m y) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w(0, y, t)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial w(a, y, t)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial w(x, 0, t)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial w(x, b, t)}{\partial y} = 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w(0, y, t) = 0 \\ w(a, y, t) = 0 \\ w(x, 0, t) = 0 \\ w(x, b, t) = 0 \end{bmatrix}$$

Dónde las funciones  $\psi_m(x)$  y  $\varphi_n(y)$  corresponden a una placa empotrada:

$$\psi_m(x) = A \cdot (\cos(\eta_m x) - \cosh(\eta_m x) - \beta_m \sin(\eta_m x) + \beta_m \sinh(\eta_m x))$$

$$\varphi_n(y) = B \cdot (\cos(\bar{\eta}_n y) - \cosh(\bar{\eta}_n y) - \bar{\beta}_n \sin(\bar{\eta}_n y) + \bar{\beta}_n \sinh(\bar{\eta}_n y))$$

Donde  $\eta_m$  y  $\bar{\eta}_n$  son las raíces de la ecuación, de forma que:

$$\sin(\eta_m a) + \sinh(\eta_m a) + \frac{[\cos(\eta_m a) - \cosh(\eta_m a)]^2}{\sin(\eta_m a) - \sinh(\eta_m a)} = 0$$

De esta igualdad se obtiene:

$$\eta_1 a = 4,730041, \eta_2 a = 7,853205, \dots$$

Y la segunda raíz:

$$\sin(\bar{\eta}_n b) + \sinh(\bar{\eta}_n b) + \frac{[\cos(\bar{\eta}_n b) - \cosh(\bar{\eta}_n b)]^2}{\sin(\bar{\eta}_n b) - \sinh(\bar{\eta}_n b)} = 0$$

Se obtiene lo siguiente:

$$\bar{\eta}_1 b = 4,730041, \bar{\eta}_2 b = 7,853205, \dots$$

Mientras que las  $\beta$  son:

$$\beta_m = \frac{\cos(\eta_m a) - \cosh(\eta_m a)}{\sin(\eta_m a) - \sinh(\eta_m a)}$$

$$\bar{\beta}_n = \frac{\cos(\bar{\eta}_n b) - \cosh(\bar{\eta}_n b)}{\sin(\bar{\eta}_n b) - \sinh(\bar{\eta}_n b)}$$

Por otro lado, las constantes  $A, B$  son libres son iguales. Además por simetría también podrían ser iguales. Entonces si normalizamos la Matriz  $M$ , y llamando  $A = B = D$ :

$$\rho h \cdot \int_0^a \int_0^b [\phi_{1,1}(x, y)]^2 dx dy = 1$$

$$\rho h \cdot \int_0^a \int_0^b [\psi_1(x) \cdot \varphi_1(y)]^2 dx dy = 1$$

Obtenemos el valor de la constante:

$$D = \frac{1}{\sqrt{\rho a b h}}$$

La cual depende de  $\rho, h, a, b$  como era de esperar.

$$\phi_{m,n}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\rho a b h}} \psi_m(x) \cdot \varphi_n(y)$$

### 6.3.2.- Solución del problema genérico para N=1

Como siguiente paso, se procede a resolver el problema para una placa empotrada en el contorno, para ello se ha elegido  $N_1 = 1$  y  $N_2 = 1$  para los términos de Galerkin, es decir  $N = 1 \times 1 = 1$ .

$$M = 1$$

$$K = 4836,5523797$$

$$C = 6,50785149$$

Para resolver las matrices, se procede a resolver las siguientes ecuaciones:

$$[P(s)] \cdot \{q(s)\} = \{f(s)\} + \{k(s)\} \quad \text{donde} \quad [P(s)] = s^2[M] + sG(s)[C] + [K]$$

$$\{f(s)\} = \frac{1}{s}(0,37577506), \quad \{k(s)\} = \frac{1}{s}(0), \quad G(s) = \frac{220}{s + 220}$$

Luego de haber resuelto las ecuaciones, para el caso de la placa empotrada, iniciaremos a realizar una serie de análisis.

### 6.3.3.- Capacidad de amortiguamiento en el centro de la placa

De forma análoga al primer caso, se va a elegir el centro de la placa como partida del análisis.

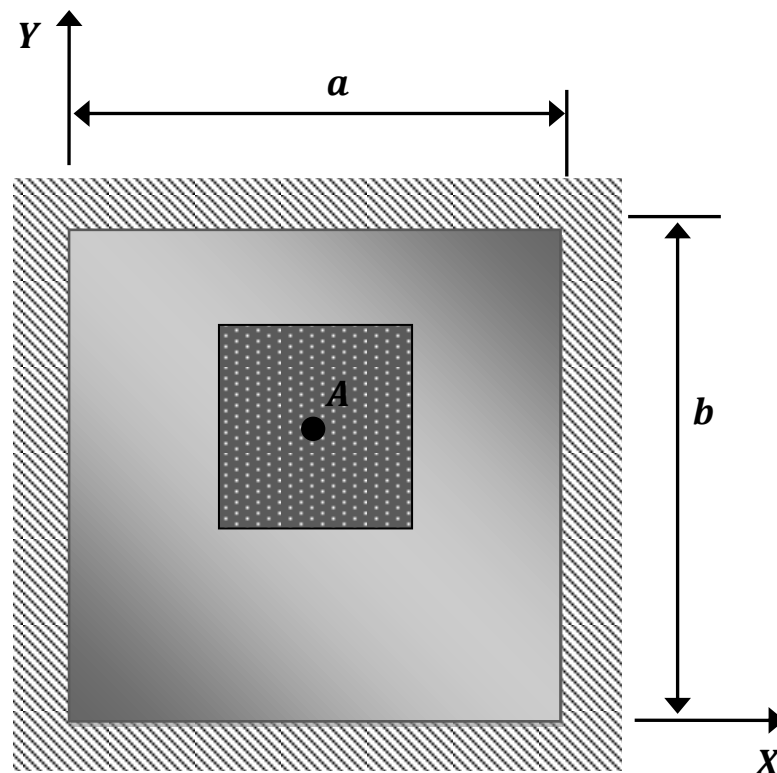


Fig. 6.24 Posición central de la placa.

*Fig. 6.25 Desplazamiento en el centro de la placa.*

Como se puede ver en la figura 6.25, la flecha del caso amortiguado es menor que del caso no amortiguado, esto significa el parche amortiguador ha cumplido su cometido, del cual se han obtenido los siguientes datos:

Desplazamiento máximo para el caso **No Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x}^* = 0,0072579 \text{ mm}$$

Desplazamiento máximo para el caso **Amortiguado** es:

$$w_{m\acute{a}x} = 0,0067911 \text{ mm}$$

Capacidad de Amortiguamiento:

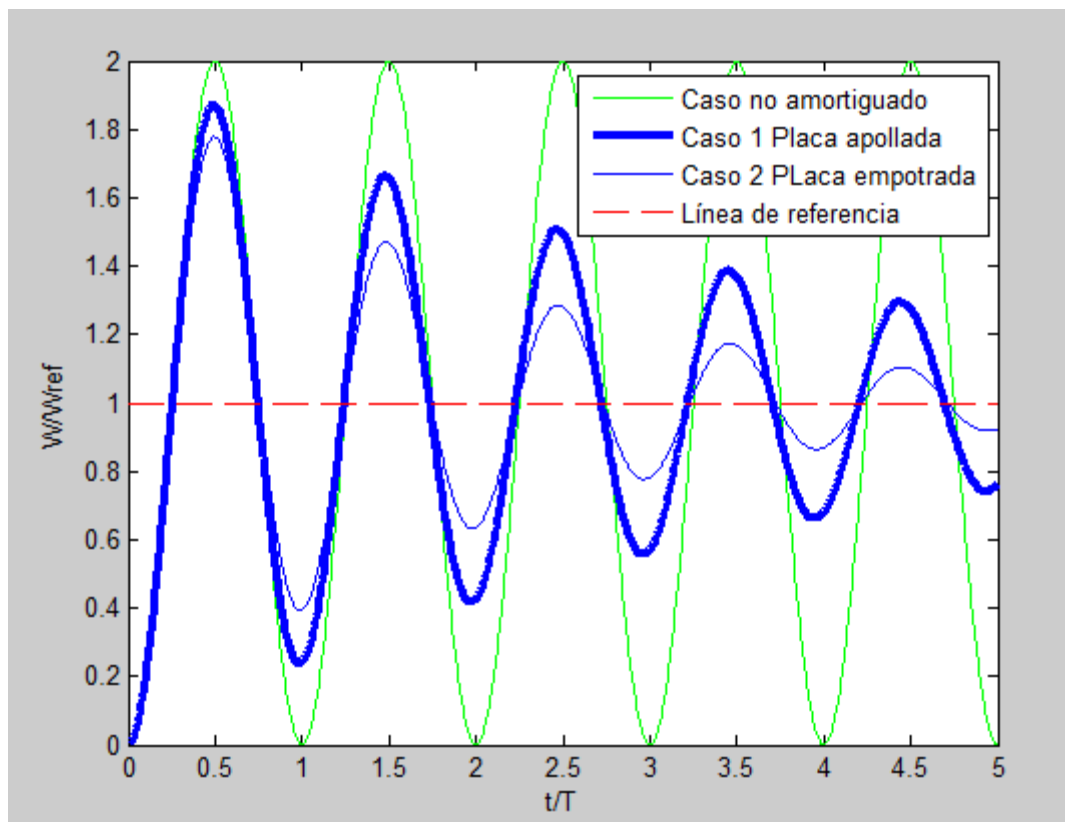
$$\eta \equiv \left( 2 - \frac{w_{m\acute{a}x}}{w_{ref}} \right) \times 100 = 2 - \frac{0,0067911}{0,0036289} = \mathbf{12,86 \%}$$



Finalmente, se observa que el desplazamiento obtenido es menor, como era de esperar, ya que al estar empotrada la placa, esta se encuentra más restringida al movimiento, con lo cual se puede ver confirmado en los resultados, mientras que la capacidad de amortiguamiento demuestra que la condición de contorno de la placa es un factor que también afecta a los resultados de la capacidad.

### 6.3.3.1- Comparación de la capacidad de amortiguamiento entre el caso 1 y el caso 2

Para una mejor comparativa de resultados, se ha procedido a dibujar ambos desplazamientos en una misma gráfica tanto del caso 1 como del 2.



*Fig. 6.26 Desplazamientos adimensionales del caso 1 y caso 2.*

Finalmente como se observa en la figura 6.26, el desplazamiento con respecto al tiempo, pero para ello se ha adimensionalizado, con el fin, de que la comparación sea más sencilla de distinguir en la figura.

Para ello la adimensionalización de los desplazamientos en los casos 1 y 2 se ha hecho con respecto al desplazamiento de referencia, mientras que el tiempo con respecto al periodo.

Casos	<i>Placa Apoyada</i>	<i>Placa Empotrada</i>
$w_{m\acute{a}x}^*$	0,1661595 mm	0,0072579 mm
$w_{m\acute{a}x}$	0,1533181 mm	0,0067911 mm
$\eta$	<b>15,46 %</b>	<b>12,86 %</b>

*Tabla 6.9. Comparación de resultados para los casos de placa empotrada y apoyada.*

# Conclusiones

Se ha iniciado explicando el elemento amortiguador, es decir las características del material viscoelástico, también se han descrito conceptos como de la relajación y se ha comparado el elemento viscoelástico con elementos mecánicos. Por otro lado en el siguiente capítulo se ha hecho una introducción a la placa, así como la hipótesis básica, ecuaciones de compatibilidad, etc. Todo ello con el objetivo de obtener la ecuación diferencial de la flexión de placas isótropas, para plantear la ecuación de equilibrio de la placa en estado estático como el estado inicial de la ecuación de equilibrio.

Sin embargo en el siguiente capítulo, se evalúa a la placa con amortiguamiento viscoelástico no local, para ello se ha iniciado introduciendo un término más en la ecuación de equilibrio, la inercia de la placa. Convirtiendo nuestro problema estático en uno dinámico. Cabe destacar que en estas condiciones de la ecuación, es de suma importancia porque se considera un problema de vibraciones libres, es decir que no actúa ninguna fuerza externa sobre la placa, con la finalidad de hallar los modos propios y sus frecuencias propias de vibración.

Es así, que continuando en este capítulo, después de hallar los modos y frecuencias propias, se ha procedido a introducir en la ecuación de movimiento el término del amortiguador viscoelástico, el cual después de haberse explicado sus particularidades, se ha elegido el caso no local, este término amortiguador está determinado bajo los siguientes parámetros  $\Delta x, \Delta y$  ya que se trata de una superficie a amortiguar, por consiguiente el elemento amortiguador también será una superficie amortiguadora.

También hay que decir, que éste término amortiguador está formado por dos términos, el amortiguamiento externo como interno, pero por simplicidad no se considera el amortiguamiento interno, siendo más práctico a la hora de resolver la ecuación utilizando solamente el amortiguamiento externo, ya que el amortiguamiento externo está formado por funciones tales como la de relajación y la de kernel espacial.

Con respecto a la función de relajación  $g(t - \tau)$ , se puede sustituir por diferentes modelos, como se explica en el capítulo de placas con amortiguamiento no local, del cual se ha resuelto distintos casos, sin embargo el resultado más óptimo ha sido dado por el decrecimiento exponencial. Además como esta función depende del parámetro de amortiguamiento  $\mu$ , se ha procedido en realizar comparaciones variando el valor de este parámetro. Ya que, aunque este parámetro defina el comportamiento elástico y el viscoso, al alearlo el material viscoelástico se hace viscoso.

Por otro lado para la función de kernel espacial  $c(x - \xi, y - \eta)$ , también se pueden utilizar diferentes modelos, pero el considerado para los estudios posteriores ha sido el modelo de decrecimiento exponencial para el análisis de la placa apoyada en los lados, siendo el parámetro del que depende esta función  $\alpha$ ; finalmente se ha llegado a la conclusión de que para valores muy altos del parámetro  $\alpha$  se obtienen valores de la capacidad de amortiguamiento mayores.

En el siguiente capítulo se ha planteado la ecuación de movimiento de una placa tratado con un amortiguamiento viscoelástico no local, que para obtener su solución, se ha aplicado el método de Galerkin acompañada de la Transformada de Laplace. Para después resolver diferentes casos, variando características, ya sea de la placa como del propio elemento amortiguador.

Cabe destacar que el clásico método de Galerkin en este trabajo muestra ser una herramienta útil en el momento de determinar parámetros dinámicos en placas anisótropas cuya solución analítica es de suma complejidad en el campo de la dinámica estructural.

Con respecto a la carga utilizada para el análisis de la placa, se ha utilizado una magnitud genérica para la fuerza externa  $F(x, y, t) = 1 \text{ N/m}^2$ , a su vez facilitan los resultados y la propia comparación en los diferentes casos planteados.

Mientras tanto como es sabido una placa contiene infinitos puntos, pero los análisis llevados a cabo en el capítulo de ejemplos numéricos, se ha demostrado que es en el centro de la placa  $x = a/2, y = b/2$  el más conveniente para analizar a la hora de comparar los desplazamientos de la placa.

Otra de las conclusiones durante el desarrollo de la ecuación, como bien es sabido las matrices utilizadas para su solución, pueden ser de dimensiones  $N = N1 \times N2 \rightarrow M_{\infty, \infty}$  debido a las series de Galerkin, sin embargo los resultados obtenidos indican que el mayor peso del desplazamiento a la hora de calcular la matrices, se encuentra en el primer término de la matriz, por lo tanto se llega a la conclusión de que para obtener muy buenos resultados, es suficiente con  $N = 1$ .

Con respecto al parámetro  $\eta$  (*capacidad de amortiguamiento*), se han obtenido diferentes valores para los diferentes casos planteados y de esta forma se realizan comparaciones más cómodas entre las mismas. Además el desarrollo de la serie de Galerkin tiene un peculiar resultado, con respecto a las demás ecuaciones, ya que como se explicó anteriormente al definir  $N = 1$ , esto hace que  $\eta = CTE$  para todos los puntos de la placa.

Cabe mencionar que durante los análisis, donde se variaba las propiedades del elemento amortiguador, se concluye que la influencia del parámetro  $h_0$  es mucho

mayor que  $\mu$ , por lo tanto a la hora de escoger un material amortiguador, se debe tener en cuenta esta relación, ya que puede resultar mucho más costoso la compra de dicho material, y que al final sus prestaciones no sean compensadas.

# Trabajos Futuros

Cuando se ha iniciado a resolver la ecuación de movimiento de la placa con el amortiguamiento viscoelástico no local, se hicieron algunas simplificaciones, entre ellas cabe destacar la función de amortiguamiento interno, que por razones de simplicidad se prescindió de este. Sin embargo se puede proponer como una investigación futura una nueva solución de la ecuación de movimiento incluyendo esta función  $\gamma(x, y)$  en los resultados.

Después de obtener diferentes resultados a raíz de diferentes análisis realizados a la placa, se puede decir que sería recomendable llevar a cabo una programación de elementos finitos para estos casos de placas, ya que de este modo no solo se puede analizar diferentes casos de placas y entornos, sino que a su vez placas unidas mediante uniones ya sean soldaduras o tornillos, lo cual nos daría aplicaciones aún más prácticas que las ya obtenidas.

Por otro lado, cada vez que se proponían análisis variando parámetros, se hacían variando uno a la vez y comparando los resultados con el original. Sin embargo también puede ser de gran utilidad cambiar dos o más parámetros a la vez, para que posteriormente proceda su comparación.

Como punto final, todos estos resultados se han obtenido utilizando el programa de cálculo llamado Matlab, es particular la herramienta M-file. Sin embargo para lograr cálculos más interactivos se podría optar por utilizar la herramienta GUIDE, el cual mediante ventanas programadas, se puede establecer alternativas interactivas, es decir programarlo para que el usuario pueda elegir condiciones de contorno, tamaño y características de la placa, tamaño y características del material viscoelástico; para que finalmente obtenga gráficas respecto a estos cambios. Facilitando y optimizando los cálculos en los análisis del usuario.

# Bibliografía

**A Galerkin Method for distrubed systems with non-local damping.** Y Lei, M. I. Friswell, S. Adhikari. *International Journal of Solids and Structures* (2006).

**Analytical solution for free vibration of rectangular Kirchhoff plate from wave approach.** Mansour Nikkhah-Bahrami, Masih Loghmani, and Mostafa Pooyanfar. *World Academy of Science, Engineering and Technology* (2008).

**Damping models for structural vibration.** Adhikari. *Thesis Cambridge University, UK* (2001).

**Dynamic of non-viscously damped beams.** Adhikari, S., Lei, Y., Friswell, M.I. *Journal of applied Mechanics, submitted for publication.*

**On damping mechanisms in beams.** Banks, H.T., Inman, D.J., *Journal of Applied Mechanics* (1991).

**Nonlocal elasticity.** Eringen, A.C., Edelen, D.G.B. *International Journal of Engineering Science* (1972).

**Computational Galerkin Methods.** Fletcher, C.A.J. *Springer-Verlang, New York.* (1984)

**Viscoelasticity, second revised edition.** Flugge, W. *Springer-Verlag, Berlin.* (1975).

**Complex modes and frecuencies in damped structural vibrations.** Krenk, S. *Journal of Sound and Vibration.* (2004).

**A superconvergent method for approximating the bending moment of elastic beam with hysteresis damping.** Lin, T., Russell, D.L. *Applied Numerical Mathematics.* (2001).

**On mathematical models for teh elastic beam with frequency-proporcional damping.** Russell, D.L. *Control and Estimaton in Distruted Parameter Systems.* (1992).

**Linear damping models for structurals vibration.** Woohouse, J. *Journal of Sound and Vibration.* (1988)

**Proyecto Fin de Carrera.** *Dinámica de vigas con amortiguamiento no local.* Autor. Sergio González López.

**Análisis estructural de placas y láminas.** José Angel Jurado y Santiago Hernández.

**Dinámica de estructuras.** Dr. Ignacio Espinosa de los Monteros